

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ДИЗАЙНА И ТЕХНОЛОГИИ»

На правах рукописи

Хейло Сергей Валерьевич

РАЗРАБОТКА НАУЧНЫХ ОСНОВ СОЗДАНИЯ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ
МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ
ДЛЯ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРЕДПРИЯТИЙ
ТЕКСТИЛЬНОЙ И ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Специальность 05.02.13 - Машины, агрегаты и процессы
(лёгкая промышленность)

Диссертация на соискание учёной степени
доктора технических наук

Научный консультант
доктор технических наук
профессор Глазунов В.А.

Москва 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
Глава 1. Робототехника в текстильной и легкой промышленности и перспективы использования механизмов параллельной структуры	12
1.1. Промышленные роботы и манипуляционные механизмы в системах технологического транспорта предприятий текстильной и легкой промышленности.....	12
1.2. Механизмы параллельной структуры	27
1.3. Практическое применение роботов параллельной структуры	39
1.4. Методы исследования механизмов параллельной структуры.....	46
1.5. Классификация механизмов параллельной структуры для плоских, вращательных и поступательных движений.....	50
Выводы по главе 1.....	53
Глава 2. Структурно-параметрический синтез, кинематический анализ плоских манипуляционных механизмов параллельной структуры.	55
2.1. Синтез плоских механизмов	55
2.2. Решение задачи о положениях	61
2.3. Решение задачи о скоростях	65
2.3.1. Решение задачи о скоростях методом винтового исчисления.....	65
2.3.3. Решение задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связей	71
2.4. Решение задачи по определению особых положений механизма...	74
2.5. Определение рабочей зоны механизма.....	79
Выводы по главе 2	82
Глава 3. Синтез и анализ поступательно-направляющих манипуляционных механизмов параллельной структуры.....	84
3.1. Синтез поступательно-направляющих механизмов.....	84
3.2. Решение задачи о положении.....	92
3.3. Решение задач о скоростях и особых положениях.....	97
3.3.1. Решение задачи о скоростях на основе уравнений связей.....	97

3.3.2. Решение прямой задачи о скоростях методом винтового исчисления.....	100
3.3.3. Решение обратной задачи о скоростях методом винтового исчисления и определение особых положений.....	109
3.3.4. Решение задачи об ускорении.....	113
3.4. Кинематическая точность поступательно-направляющего механизма.....	116
Выводы по главе 3.....	120
Глава 4. Синтез и анализ сферических механизмов параллельной структуры.....	121
4.1. Синтез сферических механизмов	121
4.2. Решение задачи о положении	130
4.3. Решение задач о скоростях и особых положениях.....	144
4.3.1. Расчет скоростей механизма методом дифференцирования уравнений связи.....	145
4.3.2. Решение задачи о скоростях методом винтового исчисления.....	148
4.3.3. Решение задачи об особых положениях методом винтового исчисления.....	154
4.4. Решение задачи об ускорении.....	158
4.5. Кинематическая точность сферического механизма.....	160
Выводы по главе 4.....	167
Глава 5. Динамический анализ манипуляционных механизмов параллельной структуры.....	169
5.1. Собственные частоты колебаний механизмов параллельной структуры.....	169
5.2. Частотный критерий особых положений.....	190
5.3. Нелинейные колебания манипуляционных механизмов.....	201
Вывод по главе...5	211
Глава 6. Управление механизмами параллельной структуры	212
6.1. Управление движением манипуляционных роботов по назначен-	212

ным траекториям на основе обратных задач динамики.....	
6.2 Управление поступательно-направляющим механизмом.....	216
6.3. Управление сферическим механизмом.....	226
6.4. Управление механизмом при переходе через особое положение...	230
Выводы по главе 6.....	236
Глава 7. Экспериментальная проверка работоспособности разработанных манипуляторов и перспективы их внедрения.....	238
7.1. Конструирование экспериментальных образцов.....	238
7.2. Экспериментальное исследование механизмов.....	252
7.3. Применения механизмов.....	256
Выводы по главе 7.....	262
Заключение.....	263
Список литературы.....	265
Приложения.....	289

Введение

Актуальность темы диссертации.

Качественное изменение технологических процессов и продукции предприятий текстильной и легкой промышленности, востребованной рынком, обеспечивается внедрением новых средств автоматизации технологических и вспомогательных операций, транспортно-складских систем. Комплексная автоматизация производства основана на создании и внедрении робототехнических систем и комплексов технологического транспорта.

При этом автоматизация транспортных операций, должна охватывать связи не только между оборудованием, но и между технологическими комплексами и переходами. При этом необходимо учитывать, чтобы уровень автоматизации основных технологических процессов соответствовал уровню автоматизации вспомогательных и транспортных операций.

На предприятиях текстильной и легкой промышленности на одну технологическую операцию приходится 3 – 6 транспортных, при этом на операциях по перемещению грузов на транспортных и складских работах занято 20-30% работающих на предприятии, а доля затрат труда составляет 30-40%.

В текстильной промышленности наиболее полно механизированы и автоматизированы технологические операции прядильного и ткацкого производства. Ручными в этих производствах являются вспомогательные операции. В производстве легкой промышленности общим является большое количество складских операций, транспортировка сырья со склада в цеха и готовых изделий на склад.

При создании роботизированных систем и комплексов в текстильной и легкой промышленности необходимо учитывать максимальную гибкость производства, быструю перенастраиваемость на выпуск различных видов продукции на одном и том же оборудовании.

В настоящее время в состав большинства робототехнических комплексов на предприятиях текстильной и легкой промышленности входят промышленные роботы последовательной структуры с различным числом степеней свободы.

Одной из основных мировых тенденций современной робототехники является создание пространственных манипуляционных механизмов параллельной структуры. Об этом свидетельствуют большое количество научных публикаций и выступлений на международных и всероссийских конференциях.

Данный класс манипуляционных механизмов широко применяется в различных отраслях промышленности в измерительных, технологических, обрабатывающих, ориентирующих устройствах. Эти механизмы имеют особые свойства, отличающиеся от механизмов последовательной структуры. В манипуляционных механизмах параллельной структуры выходное звено соединено с основанием несколькими кинематическими цепями. Многоподвижная замкнутая кинематическая цепь механизма обеспечивает большую жесткость его конструкции, грузоподъемность и точность, что приводит к уменьшению размеров и масс подвижных звеньев. Кроме того, в таких механизмах приводы располагаются на внешней поверхности по отношению к выходному звену и кинематическим цепям, что позволяет использовать их в экстремальных средах.

Несмотря на широкое развитие манипуляционных механизмов параллельной структуры, они не применяются на предприятиях текстильной и легкой промышленности.

Исходя из изложенного, можно утверждать, что разработка комплексного подхода к созданию механизмов параллельной структуры различных классов для использования на предприятиях текстильной и легкой промышленности является актуальной проблемой.

Целью диссертации является разработка научных и методологических основ конструирования манипуляционных механизмов параллельной структуры для плоских, вращательных, поступательных движений на основе комплексного решения проблем структурно-параметрического синтеза, кинематического и динамического анализа, разработки алгоритмов управления и анализа точности.

Для достижения поставленной цели в диссертационной работе решаются следующие **задачи**:

1. Анализ возможного применения механизмов параллельной структуры в текстильной и легкой на основе исследования операций, проведение классификации механизмов параллельной структуры для плоских, поступательных и вращательных движений с точки зрения их применимости для легкой промышленности.

2. Формирование принципов структурно-параметрического синтеза плоских, поступательно-направляющих и сферических механизмов параллельной структуры для механизмов с тремя степенями свободы и их классификация.

3. Разработка методологии комплексного решения задачи кинематики с учетом сингулярностей и точности.

4. Исследование динамических свойств механизмов с учетом взаимного влияния между степенями свободы на основе анализа нелинейных колебаний.

5. Разработка критериев особых положений и определение собственных частот вблизи вырожденных конфигураций.

6. Разработка алгоритма управления механизмом на основе динамических свойств, в том числе при переходе через области особых положений.

7. Разработка конструкций и физических моделей механизмов и экспериментальное исследование их свойств.

Научная новизна

1. Впервые разработаны научные и методологические основы проектирования механизмов параллельной структуры, базирующиеся на структурно-геометрическом синтезе и анализе связей, налагаемых кинематическими цепями.

2. Впервые разработаны ряды механизмов на основе кинематического анализа манипуляционных механизмов параллельной структуры. Сопоставлены результаты, полученные на основе дифференцирования уравнений связей и анализа кинематических и силовых винтов. Показано соответствие этих подходов.

3. Впервые проведены теоретические и экспериментальные исследования параметров механизмов параллельной структуры на основе критериев особых положений. Сопоставлены результаты определения особых положений, полученные на основе динамического и кинематического критериев.

4. Впервые разработаны методологические основы формирования количественной и качественной характеристик механизмов параллельной структуры в зависимости от функционального назначения на основе разработанной методологии анализа кинематической и динамической точности движения по заданному закону.

5. Впервые разработаны научные основы повышения производительности механизмов параллельной структуры на основе сформированных алгоритмов управления манипулятором параллельной структуры, основанные на минимизации ошибок по положению, скорости и ускорению. Этот алгоритм проанализирован с точки зрения устойчивости и точности движения по заданному закону.

6. Впервые исследованы процессы динамики манипуляционных механизмов параллельной структуры, связанные с взаимным влиянием между степенями свободы. Эти динамические свойства проанализированы применительно к нелинейным колебаниям.

7. Разработаны конструкции действующих моделей механизмов параллельной структуры и проведено экспериментальное исследование их характеристик.

Теоретическая значимость определена тем, что в работе создан комплексный подход к созданию манипуляционных механизмов параллельной структуры для плоских, вращательных, поступательно-направляющих механизмов.

Практическая значимость обусловлена тем, что:

- синтезированы механизмы для конкретных технических задач, выполняемых в текстильной и легкой промышленности, а также в других отраслях;
- разработан комплекс алгоритмов и программ для решения задач кинематики и динамики, на основании которых получены алгоритмы и программы управления этими манипуляционными механизмами;
- приведены анализы функциональных возможностей с учетом особых положений, точности данных механизмов;
- разработаны конструкции и проведены исследования натуральных образцов механизмов параллельной структуры различных классов;
- приведены рекомендации по проектированию механизмов.

Полученные результаты расширяют области применения данных механизмов и предназначены для их использования в текстильной легкой промышленности, а также в медицинской, космической, транспортной, обучающей, металлообрабатывающей робототехнике.

Методология и методы исследования.

При решении поставленных задач были использованы методы теории машин и механизмов, теоретической механики, дифференциального исчисления, матричного исчисления, аналитической и численной геометрии, методы классификации, теории автоматического управления, теории колебаний, аппарата винтового исчисления, теории точности, математического и компьютерного моделирования.

Положения, выносимые на защиту:

- классификация механизмов параллельной структуры для плоских, поступательных и вращательных движений с тремя степенями свободы на основе структурно-геометрического синтеза;
- создание рядов механизмов различных классов – плоских, поступательно-направляющих, сферических;
- методика и результаты расчетов кинематических характеристик механизмов различных классов, включающие решение задач о положении, скоростях, ускорениях, точности, определение сингулярностей.
- результаты анализа динамических свойств механизмов, в том числе параметры нелинейных колебаний механизмов параллельной структуры;
- динамический критерий особых положений;
- алгоритмы управления механизмами параллельной структуры, в том числе в области особых положений;
- параметры экспериментальных моделей механизмов, их конструкций и свойств.

Достоверность результатов диссертации обусловлена использованием общепринятых допущений, корректностью математических выкладок и доказа-

тельств, частичной проверкой аналитических результатов путем численного и натурного экспериментов.

Апробация результатов.

Основные положения доложены и обсуждены на конференциях:

- международная научно-техническая конференция «ТЕКСТИЛЬ–2010», (2010, Москва, МГТУ им А.Н. Косыгина),
- международная научно-техническая конференция «ТЕКСТИЛЬ–2011» (2011, Москва, МГТУ им А.Н. Косыгина),
- международная научно-техническая конференция «ТЕКСТИЛЬ–2012» (2012, Москва, МГТУ им А.Н. Косыгина),
- XXII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и аспирантов (МИКМУС-2010) (Москва, ИМАШ РАН, 2010),
- XVII международный семинар «Технологические проблемы прочности» (2010, Подольск, МГОУ),
- XXIII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и аспирантов (МИКМУС-2011) (Москва, ИМАШ РАН, 2011),
- Международная научно-практическая конференция «Современные наукоемкие технологии и перспективные материалы текстильной и легкой промышленности» Прогресс-2013 (Иваново, ИГТА, 2013),
- X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Н. Новгород, НГУ им Н.И. Лобачевского, 2011),
- XVII симпозиум «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем» (Клин, 2012),
- IX Всероссийской конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Н. Новгород, НГУ им Н.И. Лобачевского, 2012),
- 13th World Congress in Mechanism and Machine Science, (Guanajuato, Mexico, 2011),
- EUCOMES 2012 – 4th European conference on mechanism science (Santander, Spain, 2012),

- 3th IFTOMM International Symposium on Robotics and Mechatronics. (Singapore, 2013),

- ROMANSY 2014 – XX CISM-IFTOMM Symposium on theory and practice of robots and manipulators. (Russia, Moscow, 2014)

Практическая значимость работы подтверждена актами апробации на текстильном предприятии ООО «Тексфо», обувной фабрики ЗАО «Парижская коммуна». Также результаты в области проектирования, синтеза и разработанные алгоритмы решения задач кинематики, динамики и управления манипуляционными механизмами параллельной структуры использованы в проектах ФГБУН ФИАН им П.Н.Лебедева РАН.

Публикации.

По результатам выполненных исследований опубликовано 42 работы, в том числе 17 статей в журналах, входящих в перечень рецензируемых журналов ВАК, 6 статей в зарубежных журналах, 3 патента на изобретение, 3 патента на полезную модель, монография.

Объем и структура диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, семи глав, заключения, списка литературы из 244 наименований. Объем диссертации составляет 292 страницы, включая 141 рисунок и 8 таблиц.

ГЛАВА 1. РОБОТОТЕХНИКА В ТЕКСТИЛЬНОЙ И ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

В настоящей главе показаны примеры использования промышленных роботов в текстильной и легкой промышленности. Рассмотрены манипуляционные механизмы параллельной структуры для поступательных, вращательных и сферических движений, а также примеры их применения в различных отраслях промышленности. Приведены методы исследования пространственных механизмов параллельной структур.

1.1. Промышленные роботы и манипуляционные механизмы в системах технологического транспорта предприятий текстильной и легкой промышленности

На предприятиях текстильной и легкой промышленности применяются различные средства автоматизации на технологических процессах и операциях [1, 14, 23, 53, 97, 98]. На одну технологическую операцию приходится 3–6 транспортных операций. Эти операции выполняют технологические и транспортные роботы.

В *текстильной промышленности* применяются разнообразные промышленные роботы-манипуляторы. В прядильном производстве, роботы применяются для съема бобин с прядильных машин. Они обладают некоторыми особенностями. Движения робота должны быть плавными и точными, с невысокой грузоподъемностью. Исполнительный орган должен взаимодействовать с технологическим оборудованием, а для обслуживания нескольких машин для него создают транспортную линию.

Робот типа ЭМУ применяется в прядильном производстве [53]. Робот ЭМУ-Э1 обладает шестью степенями свободы при грузоподъемности до 3,5 кг и универсальной системой управления (рис.1.1). Этот робот может работать в сложной

пространственной зоне, обходить препятствия, обеспечивать доступ к объекту манипулирования с различных сторон. Используется этот манипулятор для съема поволоков на прядильном производстве.

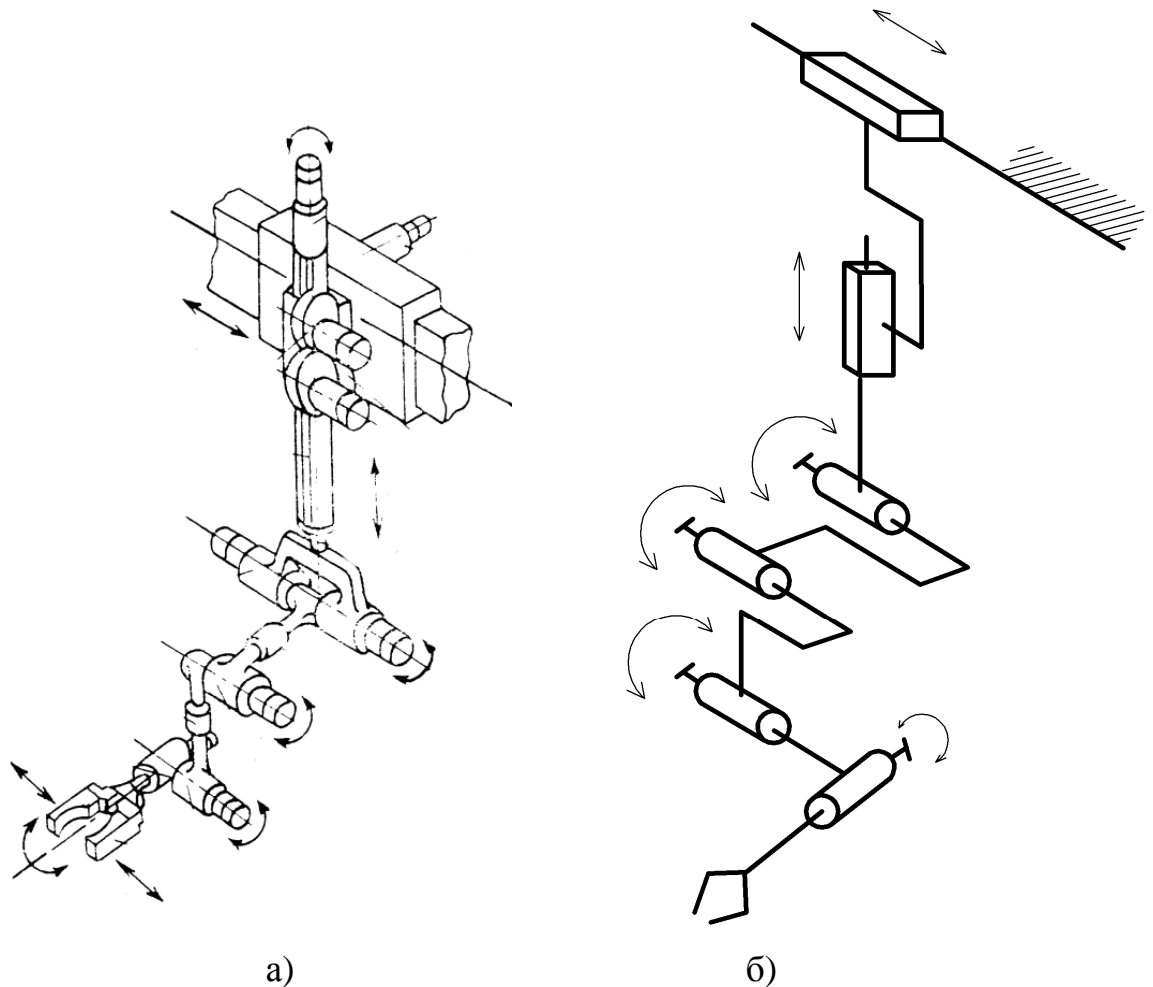


Рис. 1.1. Кинематическая схема ЭМУ-Э1

а – компоновочная схема,

б – кинематическая схема

Робот ЭМУ-Э2 предназначен для манипулирования с крупногабаритными объектами цилиндрической формы (тазами для пряжи в прядильном производстве) и имеет четыре степени свободы при грузоподъемности до 25 кг (рис.1.2). Применяется данный робот для смены наработанных тазов с лентой на лентоукладчиках чесальной машины, их дальнейшей транспортировки.

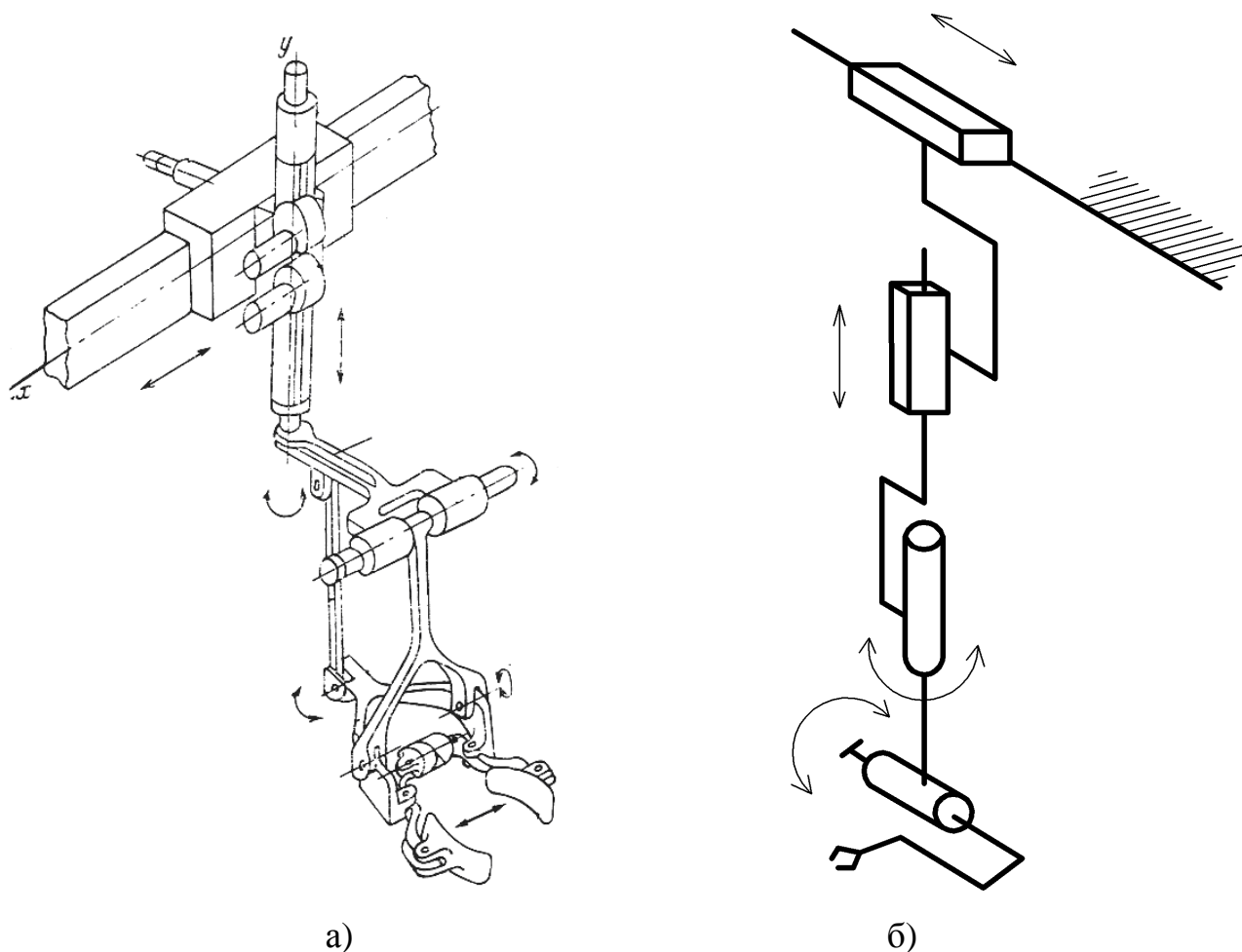


Рис. 1.2. Кинематическая схема ЭМУ-Э2

а – компоновочная схема,

б – кинематическая схема

В состав робототехнического комплекса для участка упаковки и пакетирования бобин с нитями и пряжей (рис.1.3) входят промышленный робот ТУР-10 (поз.2), промышленные робот МУП-1 (поз.3) (модульный универсальный пакетировщик), МУП-2 (поз.4) [1]. Промышленный робот ТУР-10 (рис.1.4) предназначен для съема бобин с нитями с транспортной тележки и укладки в поддон тары обладает тремя степенями свободы. Промышленный робот МУП-1 для подачи на стол поддонов, МУП-2 (рис.1.5) для съема ящика тары со стола и создание блоков из тары.

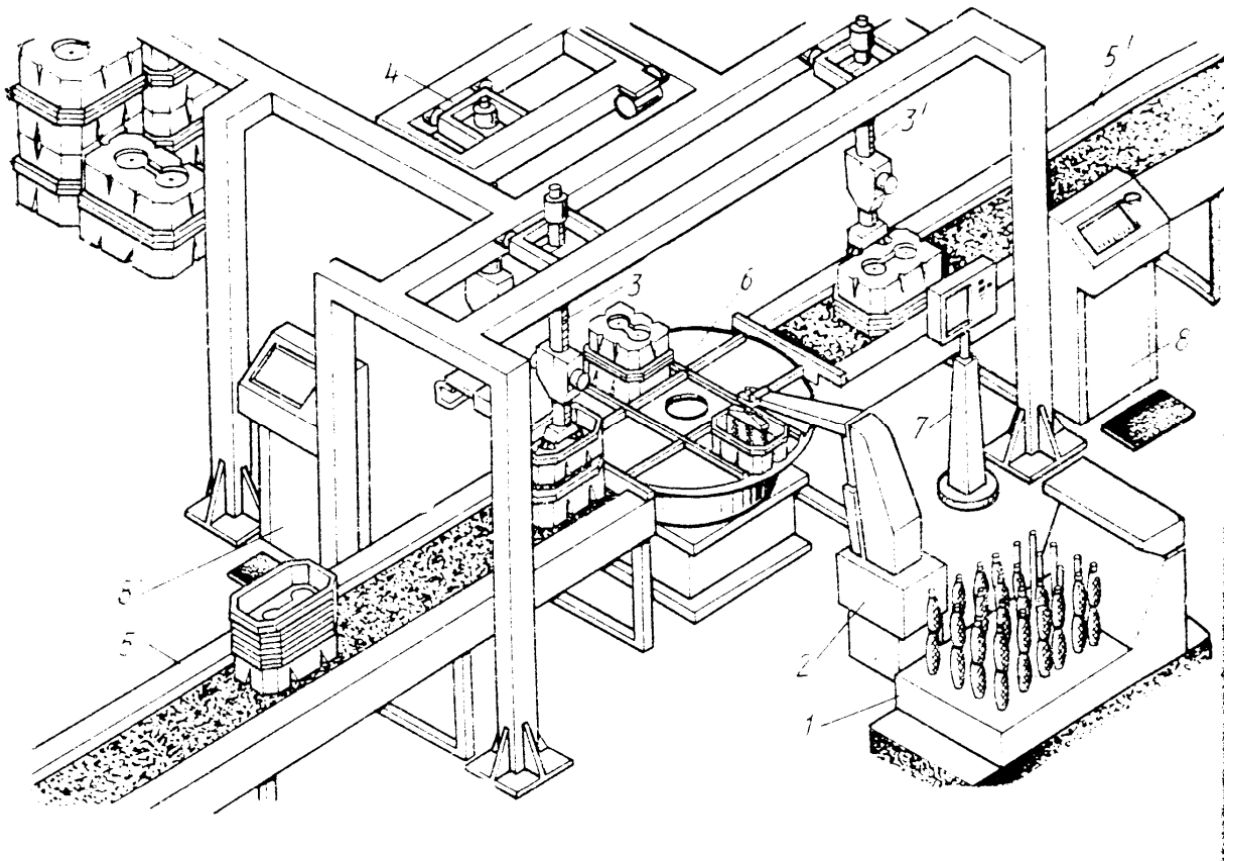


Рис.1.3 РТК упаковки и пакетирования бобин

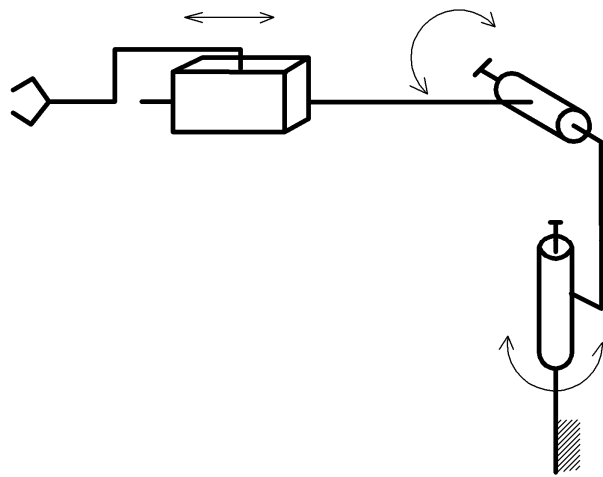


Рис. 1.4. Промышленный робот ТУР-10

Промышленный робот МУП-1 предназначен для подачи на поворотный стол поддонов и крышек полимерной тары, оснащенные вакуумными захватными присосками. МУП-2 предназначен для съема тары с продукцией с поворотного стола и формирования пакетов из полимерной тары, оснащенной клещевыми устройствами для захвата ящика.

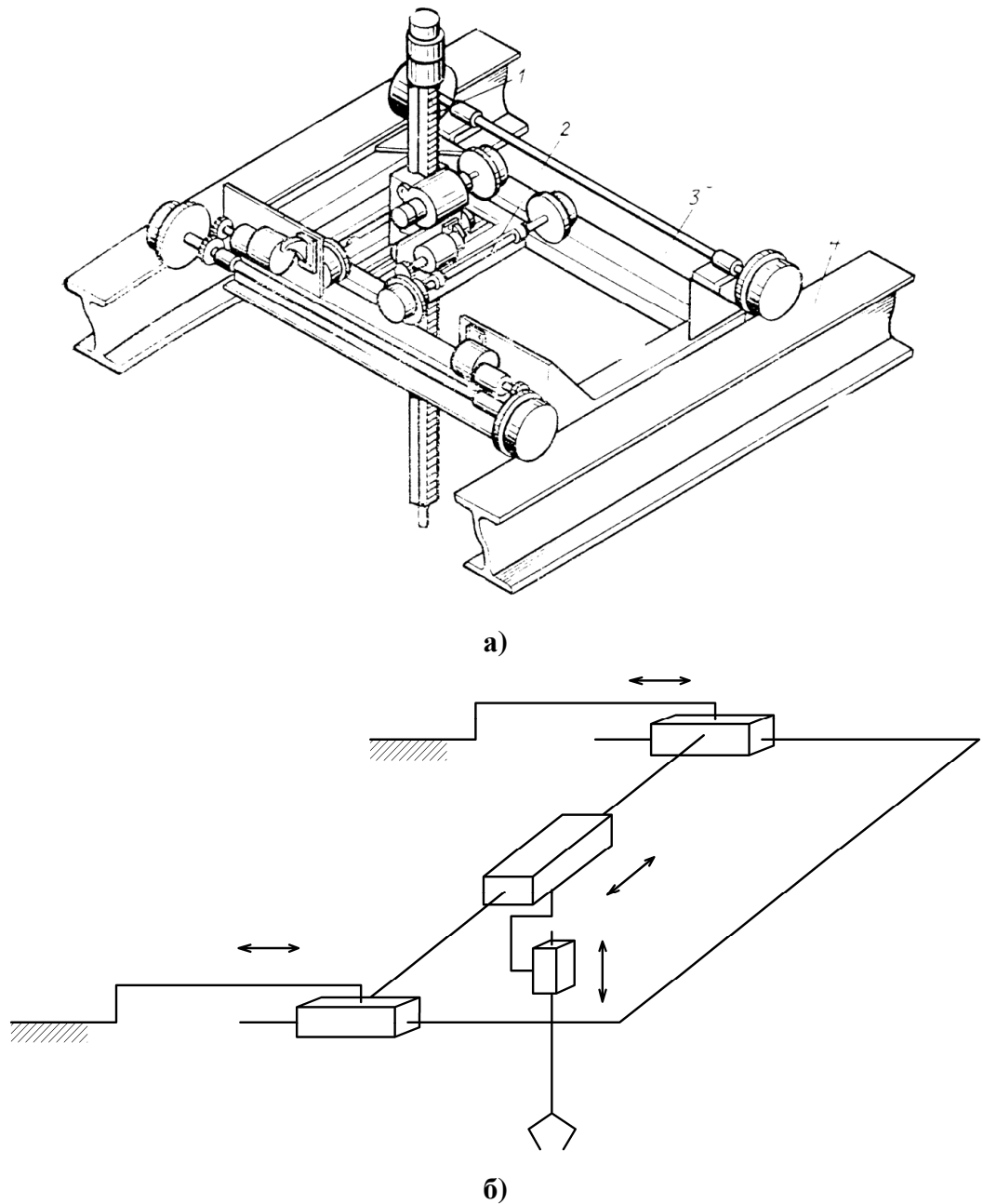


Рис. 1.5 Промышленный робот МУП-2

а – компоновочная схема, б – кинематическая схема

В робототехническом комплексе для съема и укладки чулочно-носочных изделий входит промышленный манипулятор (рис.1.6). Этот манипулятор предназначен для съема чулочно-носочных изделий после отделки и переноса их в зону действия приемного устройства. Манипулятор состоит из руки, захватного устройства и опорной стойки. Рука манипулятора совершает возвратно-поступательное перемещение по наклонной траектории.

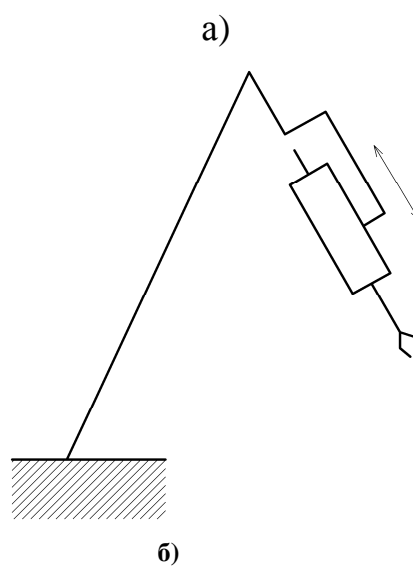
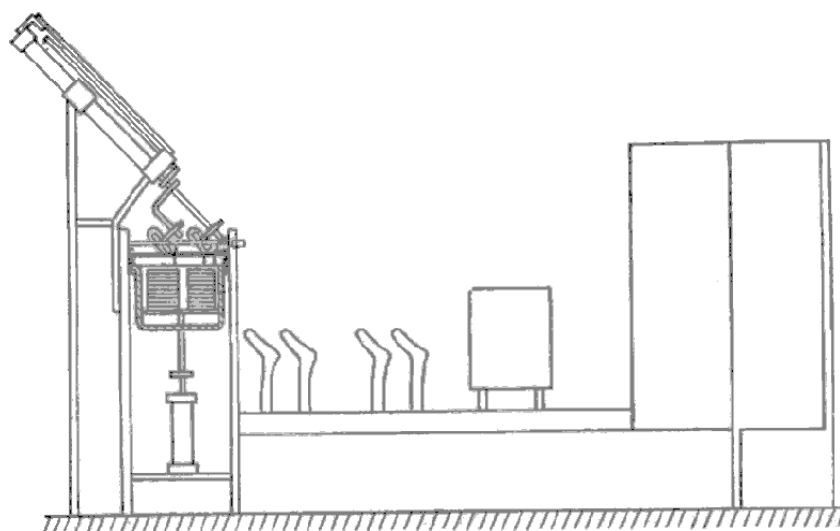
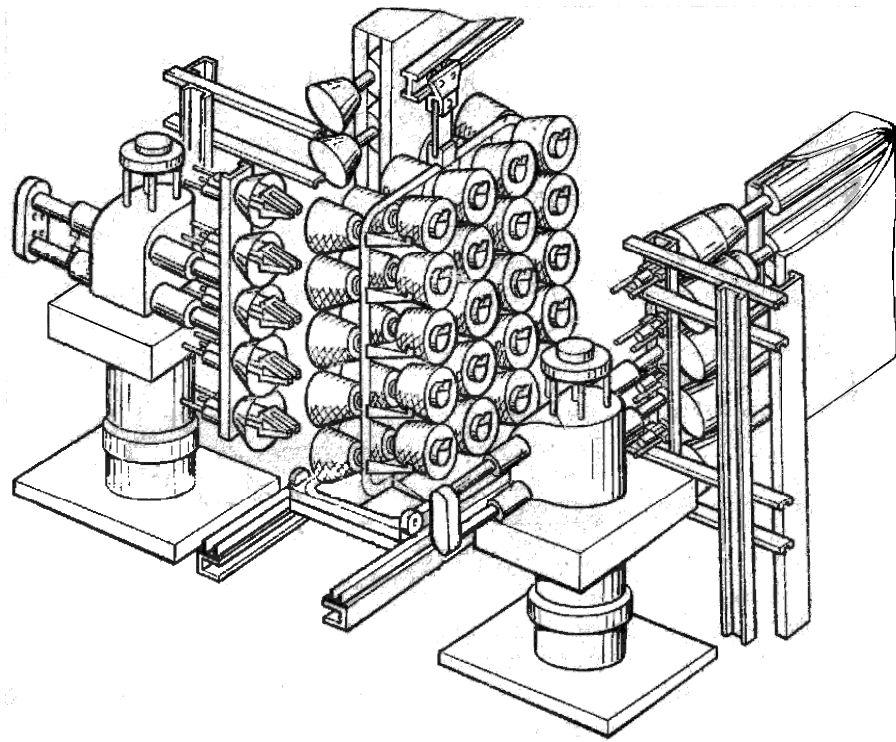


Рис. 1.6 Робот для съема чулочно-носочных изделий

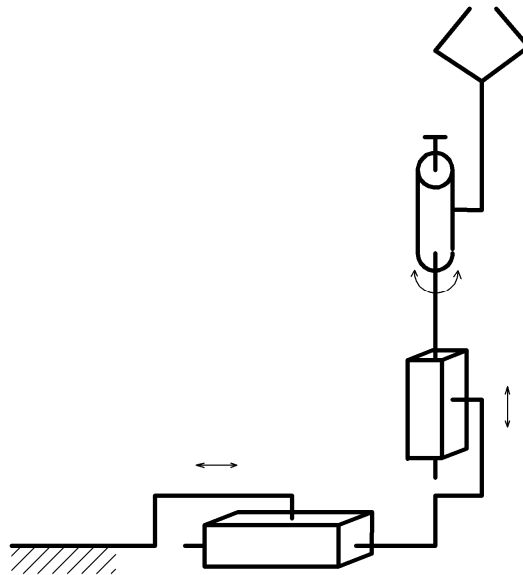
а – компоновочная схема,

б – кинематическая схема

В робототехническом комплексе для обжима бобин в крашении применяется промышленный манипулятор, предназначенный для автоматического съема бобин с транспортного средства, перемещения бобин с поворотом в зону механического обжима и возврата обработанных бобин на транспортное средство. Манипулятор имеет три степени свободы: вертикальный подъем, горизонтальное перемещение и поворот (рис. 1.7). Каждая степень свободы обеспечивается независимым приводом. Тип привода – пневматический.



а)



б)

Рис.1.7 Робот для обжима бобин

а – компоновочная схема,

б – кинематическая схема

В *швейном производстве* роботы применяются в вспомогательных операциях (ориентацию и укладывание пошиваемых заготовок), в технологических операциях (перемещение пошиваемых тканей, раскрой тканей, сборка и отделка готовой одежды), в складских операциях.

Рассмотрим особенности роботов в швейном производстве. Рулоны тканей доставляются внешним транспортом с ткацких предприятий. Погрузочные операции осуществляются транспортными автоматизированными средствами с помощью манипуляторов с ручным управлением, например, ШБМ-150 (рис.1.8). Межцеховая транспортировка контейнеров на участок разбраковки осуществляется напольными транспортными роботами грузонесущего либо грузотянущего типа.

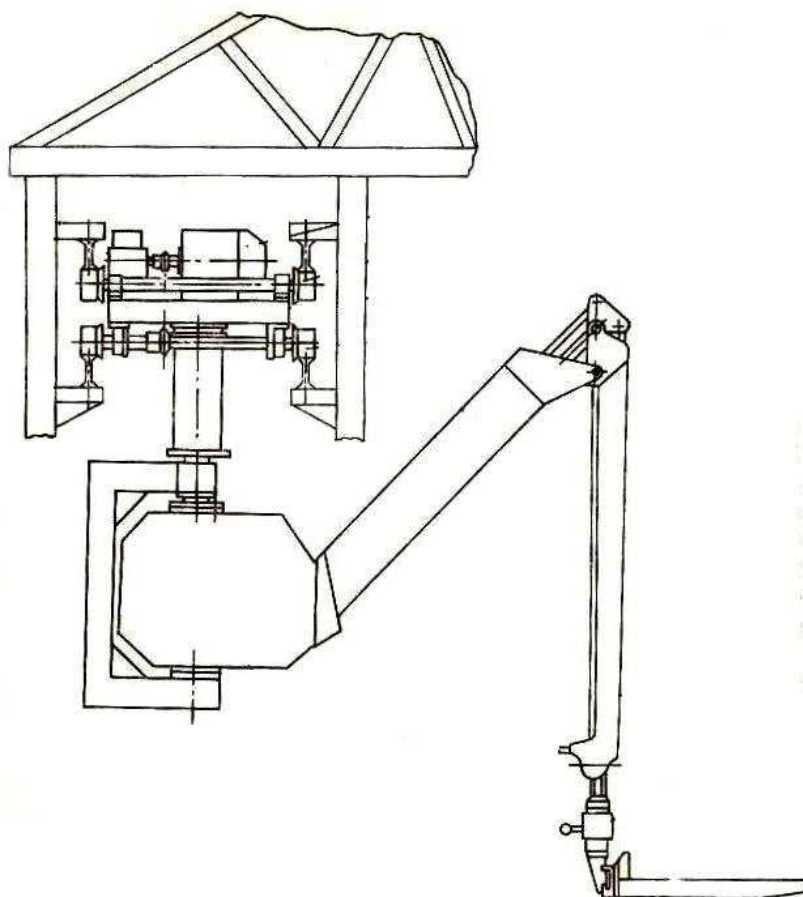


Рис. 1.8 Манипуляторов с ручным управлением ШБМ-150

Раскройный комплекс является основным комплексом робототехнических систем. Работы по техническому размножению, вырезке и маркировке лекал объемны и трудоемки. Робототехнические комплексы «Силуэт-К», «Силуэт-С» предназначены для вычерчивания раскладок лекал и их вырезки. Конструктивно «Силуэт» имеет рабочий планшет, представляющий двухкоординатную систему, состоящую из неподвижного стола, где размещен материал или лекало и исполнительный механизм. Исполнительный механизм является конструкцией портально-

го типа, состоящий из двух тележек, соединенных несущей балкой. По направляющей балке перемещается исполнительный орган. Портал перемещается с помощью двух независимых приводов (рис.1.9).

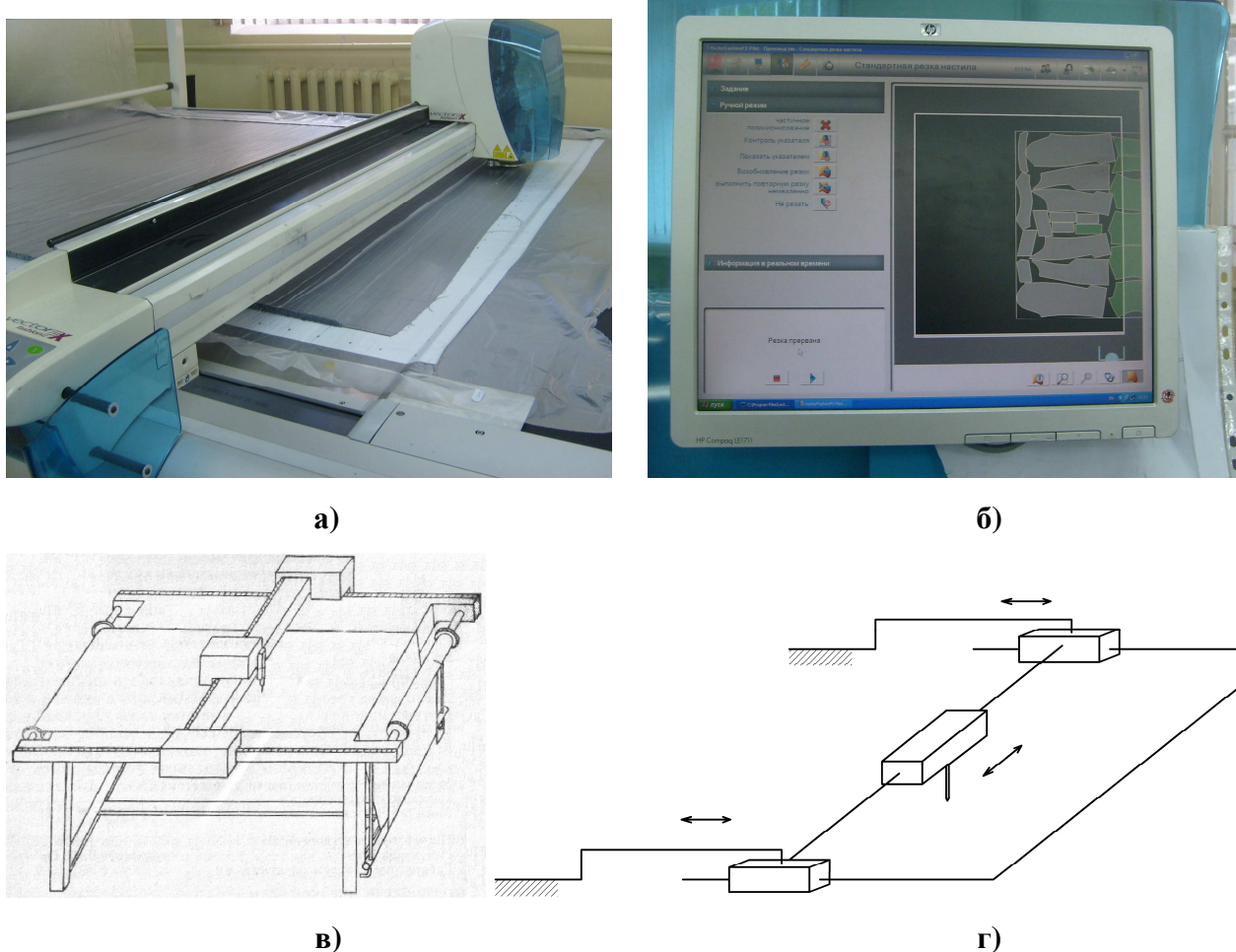


Рис. 1.9 Схема раскройного комплекса

а – фотография комплекса, **б** – схема расположения выкроек

в – компоновочная схема, **г** – кинематическая схема

Автоматизация раскроя позволяет сократить затраты труда. В качестве режущих инструментов может использоваться нож, лазерный луч, струя воды, плазма и т.п.

В робототехническом комплексе обметывания петель ОП-1 предназначен для обметывания петель на сорочках (рис.1.10). Кроме швейного полуавтомата в комплекс входит робот ПР-5 с системой управления, с двумя степенями свободы. Рабочий орган совершает подъем и поворот. Робот захватным устройством отде-

ляет манжету, поворачивается на 60° и укладывает ее в швейный автомат. После окончания обработки хватным устройством переносит в кассету-накопитель.

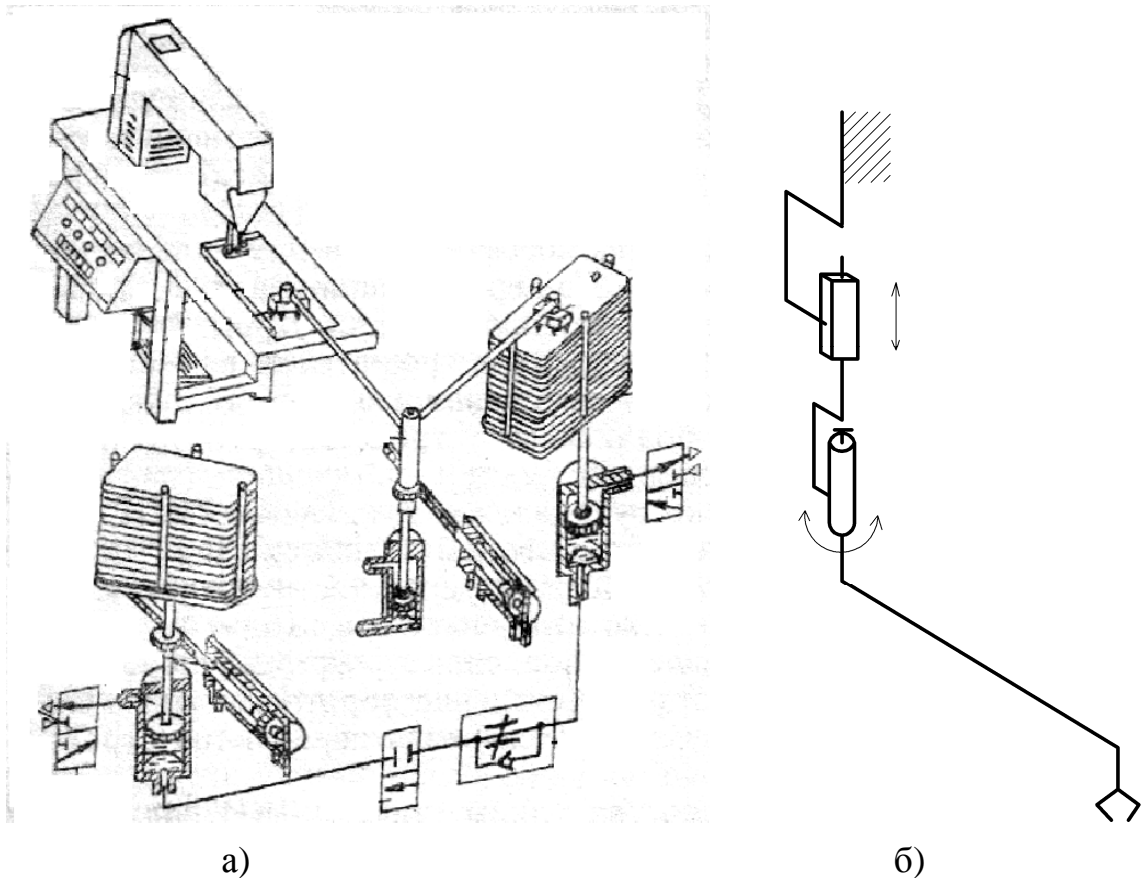


Рис. 1.10 Промышленный робот, применяемый в швейном производстве
а – компоновочная схема, б – кинематическая схема

Обувное производство характеризуется сложными технологическими процессами, большим выпуском разнообразной продукции. Основные технологические процессы высоко автоматизированы. Однако доля ручного труда приходится на подготовительное производство, вспомогательные операции (перекладка обуви, загрузка обуви в сушильные камеры)

Анализ ручных операций показывает, что вариабельность характеристик обувного производства, большой разброс в требованиях точности, зон обслуживания затрудняет использование стандартных промышленных роботов. Для съема обуви с технологического оборудования нужен робот небольшой грузоподъемности, имеющей одну-две степени свободы.

Для загрузки обуви с колодками в сушильную камеру требуется робот с грузоподъемностью до 10-15 кг, с перемещением до нескольких метров с тремя-четырьмя степенями свободы.

Для выполнения основных технологических операций (взвешивание, нанесение клея) требуется робот с обратной связью, с грузоподъемностью до 15 кг и пятью-шестью степенями свободы. Разработаны образцы модульных промышленных роботов с различным число степеней свободы типа МО (модульный, обувной). Эти манипуляционные механизмы выполнены в виде открытых кинематических цепей (рис.1.11).

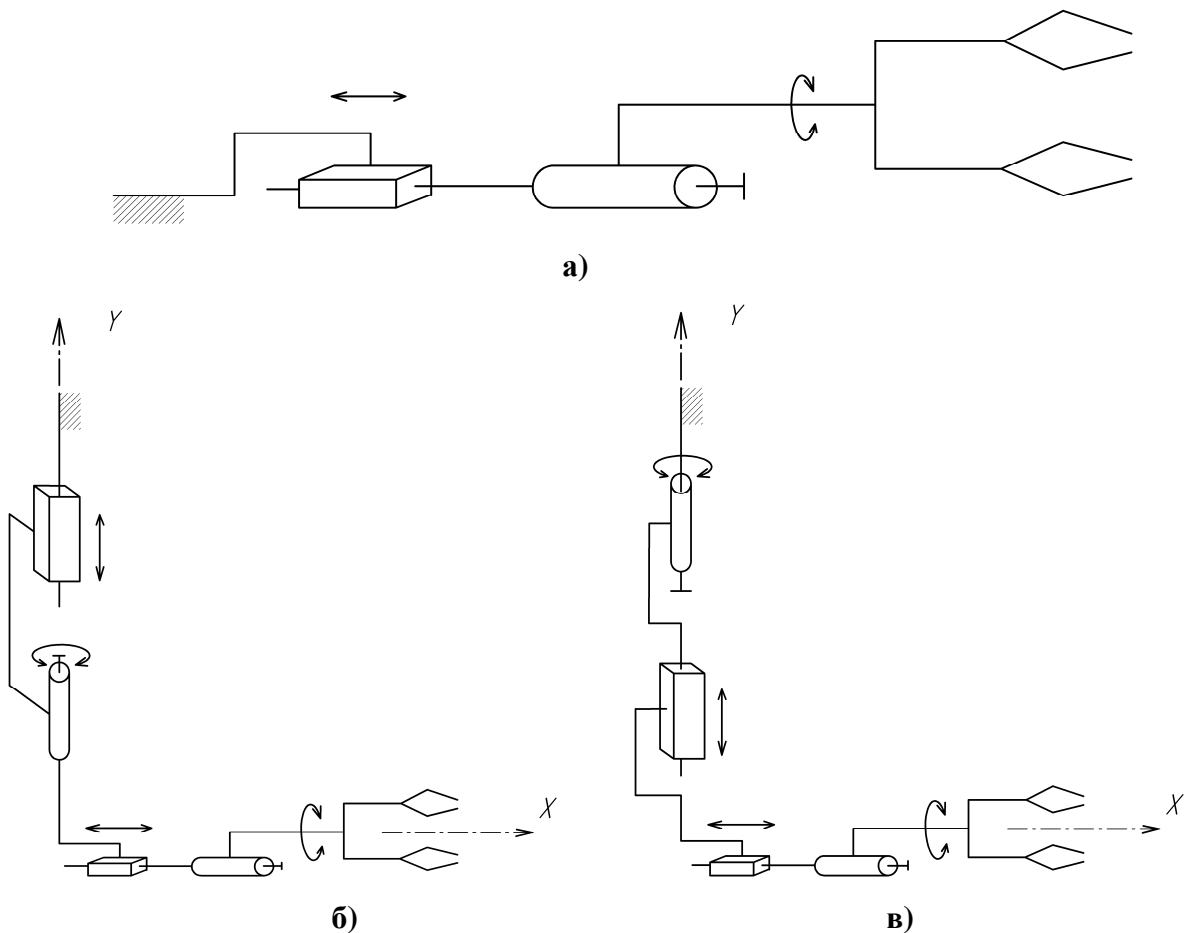


Рис. 1.11 Кинематические схемы роботов в обувной промышленности
 а – с двумя степенями свободы, б – с четырьмя степенями свободы

Промышленные роботы работают в цилиндрической системе координат и предназначены для выполнения в робототехнических системах перегрузочные операции на межоперационных складах, технологическом оборудовании и в транспортных системах. Также робот МО-2 может применяться в робототехниче-

ском комплексе по влажно-вакуумной тепловой обработке. Исполнительный орган снимает и переносит колодки с обувью в камеру.

Для выполнения основных технологических операций (взъерошивание, нанесение клея на затяжную кромку) может быть использован промышленный робот МО-3 (рис.1.12). Исполнительный орган перемещается по замкнутой траектории, причем важными параметрами являются угловая и линейная скорость движения инструмента, а также усилие, действующее на кромку верха обуви.

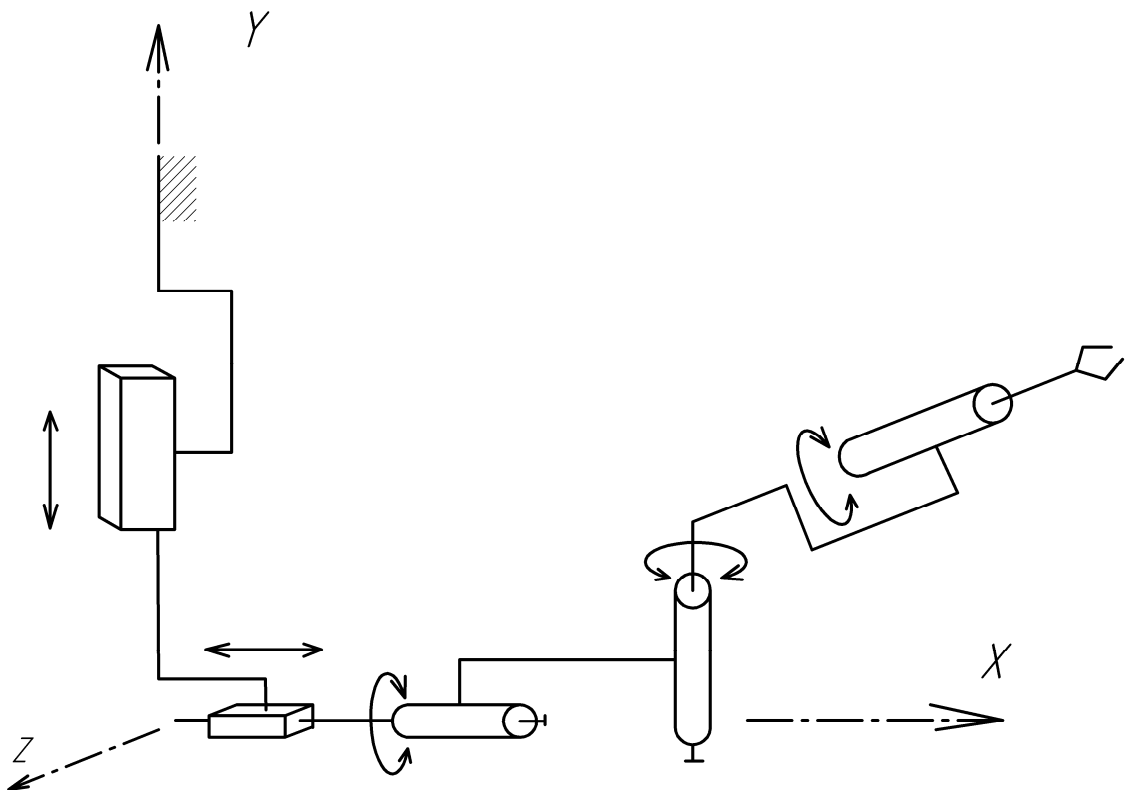


Рис. 1.12 Робот МО-3

Промышленный робот МО-3 обладает пятью степенями свободы.

В литьевых агрегатах обувного производства применяются специализированные промышленные роботы типа ПУМ-Э (пневматический универсальный манипулятор с электрическим управлением) (рис.1.13).

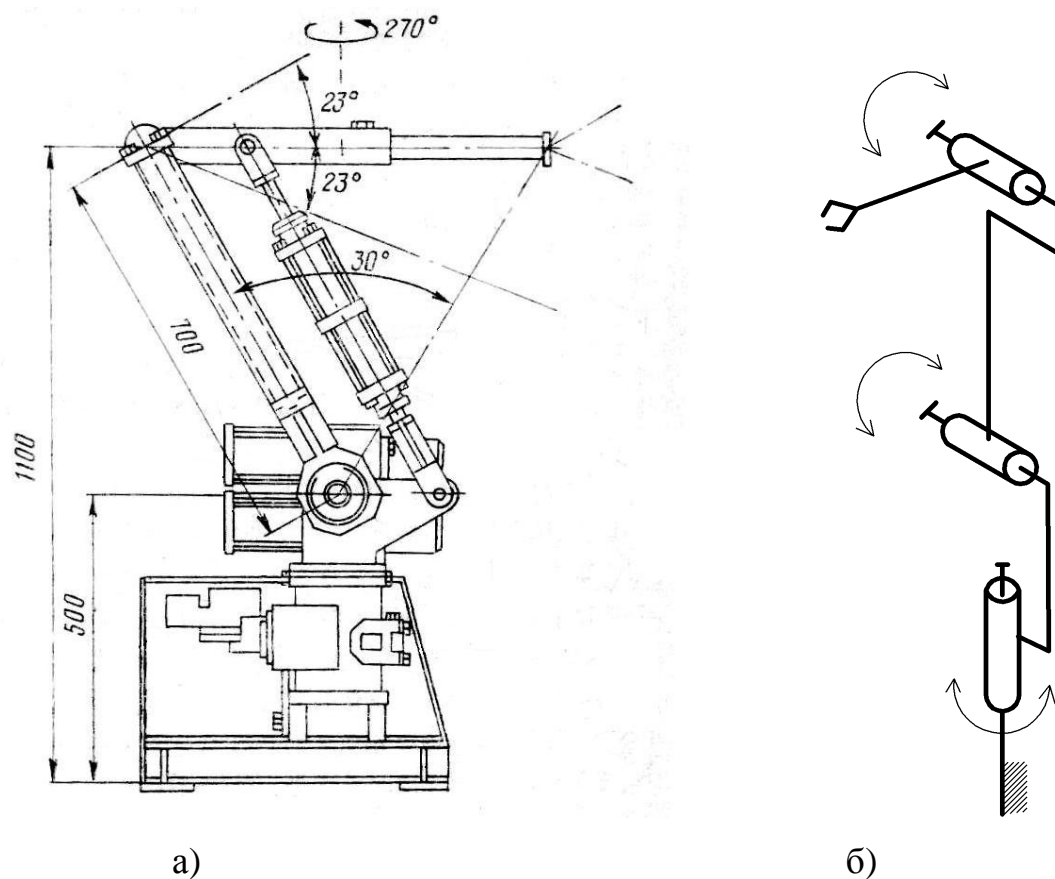


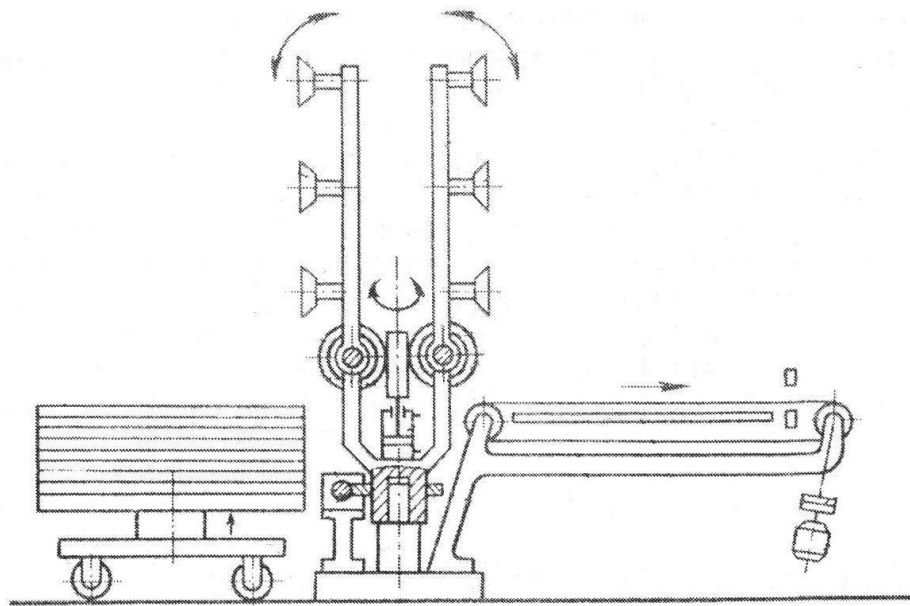
Рис.1.13 Промышленный робот ПУМ-Э

а – компоновочная схема, б – кинематическая схема

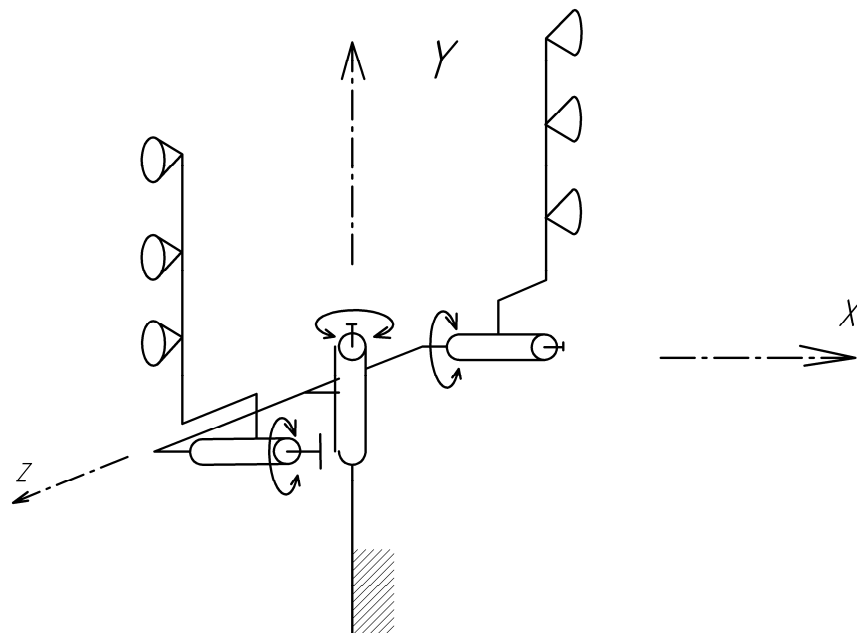
В *кожевенном производстве* применяются роботы для простых перемещений типа «взять» и «положить» обрабатываемых кож с точностью позиционирования 10 мм, со схватами вакуумного и клещевого типов [2]. В процессе производства кожи перемещают из горизонтального положения в вертикальное и наоборот. Применяемые роботы могут осуществлять либо только одну операцию по загрузке (выгрузке) кож, либо, обладая большим числом степеней свободы, выполнять операции по загрузке-выгрузке и ориентации мягких и жестких кож, совершая две-три операции.

Специализированный манипулятор МВ-1 предназначен для подачи, приема и укладки мягких и жестких кож (рис.1.14). Манипулятор имеет две руки с схватами, выполненных в виде вакуумных присосок. В рабочем положении руки расположены горизонтальном положении. В первой руке в присосках создается вакуум, соприкоснувшись с кожей и захватывая ее. Затем руки возвращается в вер-

тикальное положение, поворачивается на 180° , т.е. руки меняются местами. После поворота вторая рука принимает горизонтальное положение и схватывает следующую кожу из пачки, а первая укладывает кожу.



а)



б)

Рис.1.14 Манипулятор МВ-1

а – компоновочная схема,

б – кинематическая схема

Технологический процесс отделки жестких кож (чепраков) связан с необходимостью перекладки чепраков с одного технологического оборудования на дру-

гое. Промышленные роботы используют для перекладки кож после их сушки с транспортных средств на технологическое оборудование и обратно. Чепрак представляет собой полуфабрикат сложной конфигурацией, толщиной от 5 до 10 мм, шириной от 0,8 м до 1,5 м, длиной до 2 м. Масса составляет до 10 кг. В робототехническом комплексе на отделочном участке жестких кож применяется робот с тремя степенями свободы (рис.1.15). Рабочий орган представляет конструкцию из вакуумных присосок.

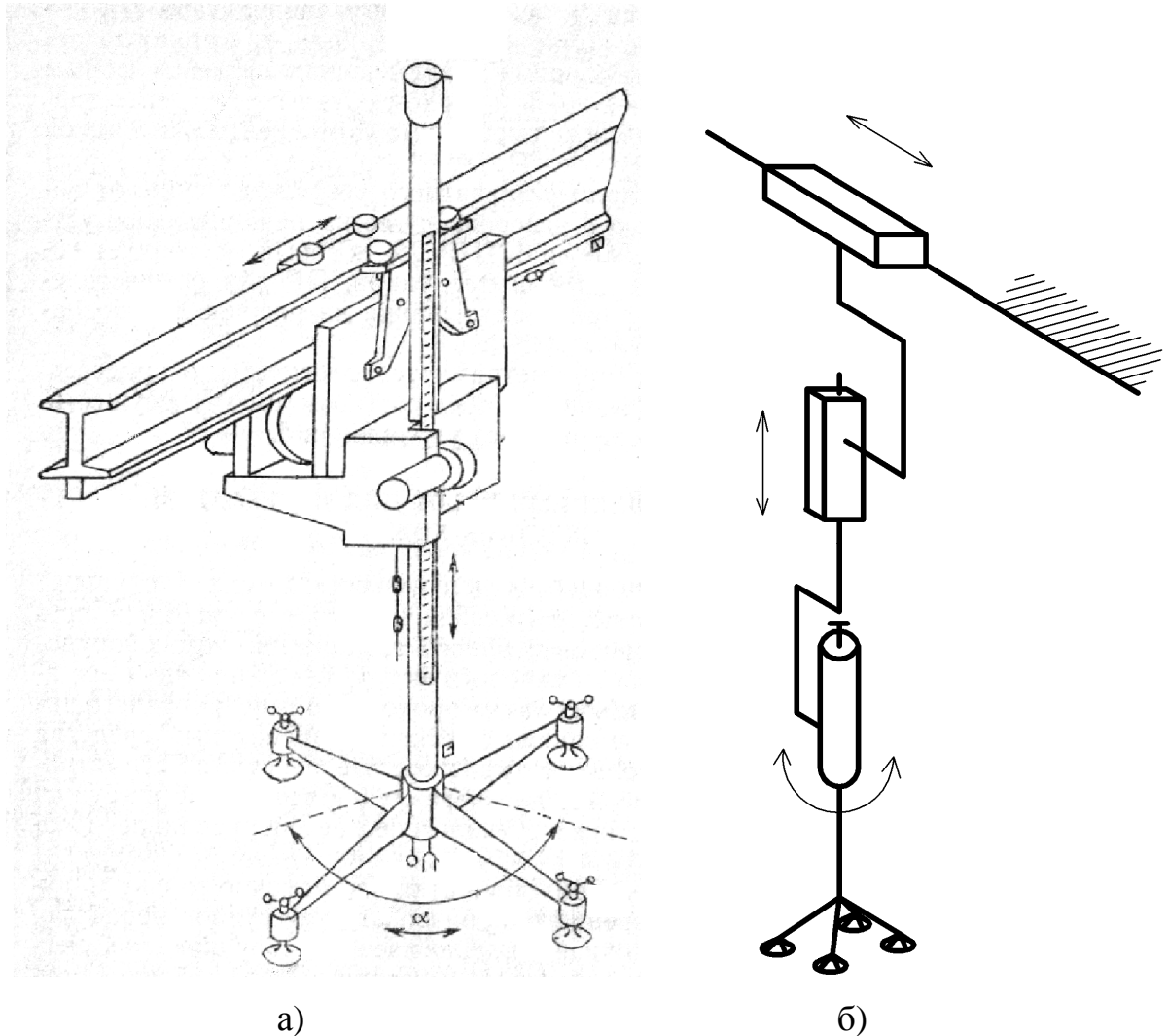


Рис. 1.15 Схема манипулятора ПР

а – компоновочная схема, б – кинематическая схема

Для погрузочно-разгрузочных работ большое применение находят манипуляционные механизмы, заменяющие машины подвешенного монорельсового и самоходного напольного транспорта, управляемые вручную оператором.

Таким образом, приведены примеры использования манипуляционных механизмов на предприятиях текстильной и легкой промышленности. В основном применяются механизмы с открытой кинематической цепью, т.е. представляют последовательную структуру.

1.2. Механизмы параллельной структуры

Одной из мировых тенденций развития робототехники является создание пространственных манипуляционных механизмов параллельной структуры. Пространственные механизмы параллельной структуры манипуляторы параллельной структуры имеют ряд преимуществ по сравнению с традиционными механизмами роботов. Эти механизмы обладают повышенными показателями по точности, жесткости и грузоподъемности, а приводы могут быть расположены на основании. В данных механизмах выходное звено соединено с основанием несколькими кинематическими цепями, каждая из которых либо содержит привод, либо налагает некоторое число связей на движение выходного звена. Многоподвижная замкнутая кинематическая цепь механизма приводит к уменьшению размеров и масс подвижных звеньев.

Интерес к этим объектам объясняется не только их функциональными возможностями, но и самой логикой развития теории механизмов. Если в начале объектом исследования были в основном плоские механизмы с замкнутой кинематической цепью и одной степенью свободы, то затем внимание стали привлекать пространственные механизмы. После этого получили развитие характерные для роботов механизмы с незамкнутой цепью, а затем развитие вновь пришло к замкнутым цепям, имеющим большое число степеней свободы.

Исследования данного класса механизмов достаточно подробно описано в монографиях: Ж.-П. Мерле [208], К. Конга и К. Гослена [194], М. Чекарелли [154], В.А. Глазунова, А. Ш. Колискова и А.Ф. Крайнева [27], в работах В.А. Глазунова [34, 35, 62, 63, 116], А.Ф. Крайнева [61], Р.И. Ализаде [2], К.С. Арзуманян [4],

Ю.Л.Саркисян, Т.Ф.Парикян [101, 102], К.Х. Хант [108], В. Аракелян, С. Брио [3, 139, 140, 141], М. Чериккато, В. Паренти-Кастелли [151, 152], Д. Денавит, Р. Хартенберг [161], Г. Гогу [172, 173, 174, 175], С.М. Госслен [177 – 179], Л.М. Лии [201], Л.В. Цай [231], Д. Рай [219], П.А. Лебедева, П.О. Мардер [79], А.Г. Овакимова [82] и ряда других авторов.

Необходимо отметить, что у манипуляционных механизмов параллельной структуры существенно уменьшается рабочее пространство манипулятора по сравнению с механизмами последовательной структуры.

Еще одной особенностью механизмов параллельной структуры является наличие особых (сингулярных) положений, в которых возможна потеря степени свободы либо управляемости выходного звена [140, 150, 171, 178, 180, 197, 203, 206, 210, 241, 244].

Взаимовлияние степеней свободы усложняет задачу управления такими механизмами

Исторически первой публикацией в этой области стала известная статья Д. Стюарта [224], в которой описывался механизм тренажера для подготовки летчиков (рис. 1.16). Однако более ранним устройством была платформа В. Гофа [182], использовавшаяся для испытаний колесно-ступичного узла автомобилей. Этот механизм был подробно исследован в работах [163, 191, 200, 206, 235, 240] и трудах других авторов.

Большое количество изобретений, связанных с использованием двигательных и измерительных устройств параллельной структуры было предложено А.Ш. Колискором с соавторами [4, 27, 56].

Существуют парадоксальные механизмы с избыточными связями, описанные в работах Д. Беннета [145]. На основе соотношений между длинами звеньев и углами разработаны пятизвенные и шестизвенные механизмы (комбинации механизмов Беннета), описанные в работах П.Г. Мудрова [81], М. Голделберг [176]. Также механизмом с особыми свойствами является механизм Брикара, описанный Д. Бейкером [142, 143].

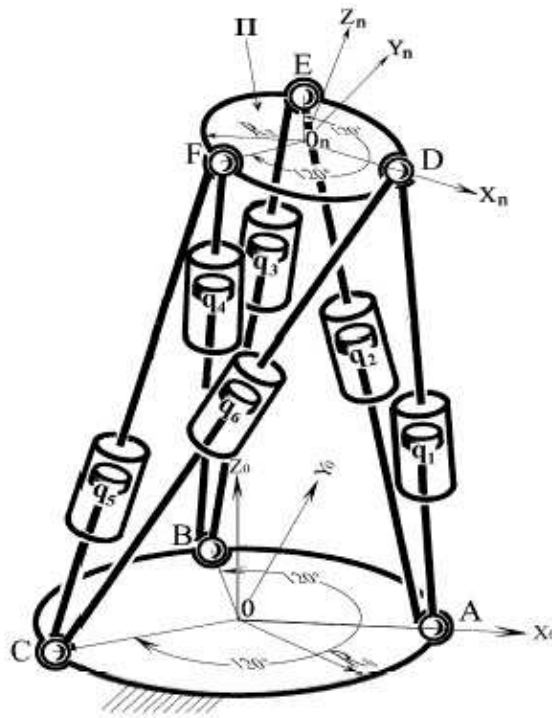


Рис. 1.16 Платформа Гауфа-Стюарта

Большое внимание имеет вопрос влияния налагаемых связей на возможные движения выходного звена (платформы) данных механизмов. Например, как должны быть сформированы кинематические цепи механизмов параллельной структуры, чтобы выходное звено имело лишь поступательные движения. Одним из первых исследований в данной области была работа Ю.Л. Саркисяна и Т.Ф. Парикьяна [102], в дальнейшем большой ряд решений был представлен К.Конгом и К.Госленом [194], Г. Гогу [172, 173], В.А. Глазуновым [86]

Наибольшее применение имеют механизмы, обладающие меньшей степенью свободы, пятью, четырьмя, тремя.

Одним из самых известных механизмов, обладающих упомянутым свойством сохранения постоянной ориентации, является робот Delta (рис.1.17), предложенный Р. Клавелем [158]. Данный тип манипулятора имеет три одинаковых цепи, состоящих из трех вращательных кинематических пар, оси которых параллельны, и шарнирного параллелограмма, оси вращательных пар которого перпендикулярны оси приводной вращательной пары. Такая конфигурация параллелограмма эквивалентна поступательной кинематической паре. В этом механизме возможно введение дополнительного вращения выходного звена за счет еще одного враща-

тельного двигателя, движение которого передается четвертой кинематической цепью, выполненной наподобие карданного вала.

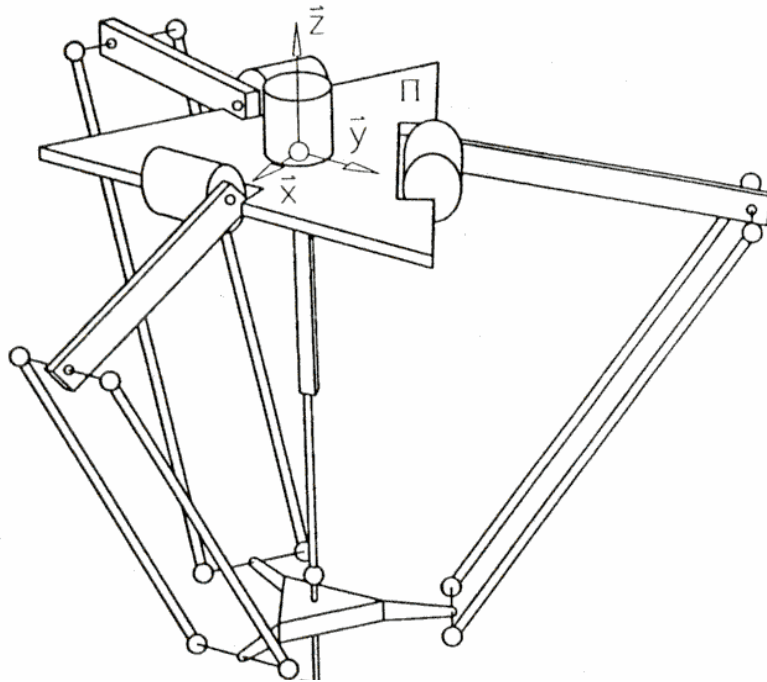


Рис. 1.17 Манипулятор Delta

Еще один механизм параллельной структуры с тремя поступательными степенями свободы, названный Orthoglide [157, 236], в котором приводы выполнены в виде линейных двигателей (рис. 1.18)

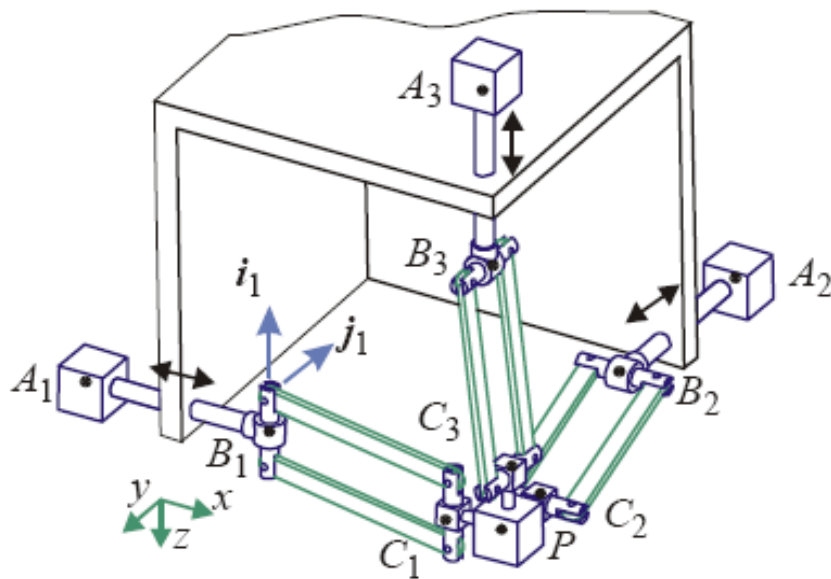


Рис. 1.18 Манипулятор Orthoglide

В данном механизме призматические пары являются входными, а движение на конечно звено передается через параллелограммы, включающие вращательные звенья. Это упрощает управление механизмом и положительно влияет на точность позиционирования.

Наличие параллелограммов в механизмах Delta и Orthoglide в конструкции кинематических цепей является общим свойством. Наличие параллелограммов ограничивает нежелательные степени свободы, однако дополнительное число кинематических пар усложняет конструкцию.

К. Конгом и К. Госленом [194] предложены манипуляторы, в которых достигнута «изоморфность», т.е. каждый линейный двигатель перемещает выходное звено лишь по одной декартовой координате с передаточным соотношением, равным единице (рис. 1.19).

Механизмы, представленные на рисунках (рис. 1.20 а, б), имеют свойство изоморфности. Они разработаны М. Чарригато и В. Паренти-Кастелли [151].

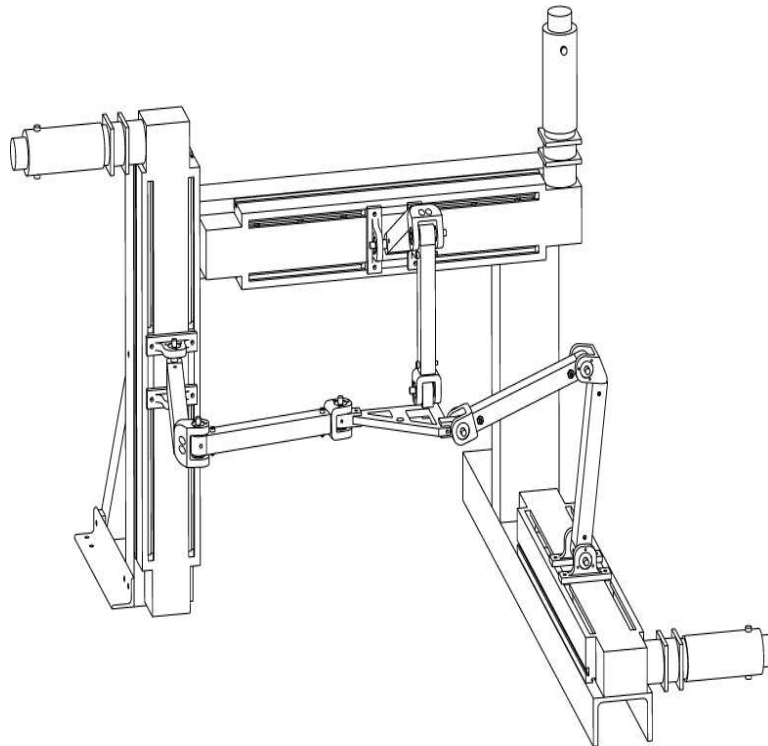


Рис. 1.19 Манипуляторы Конга и Гослена

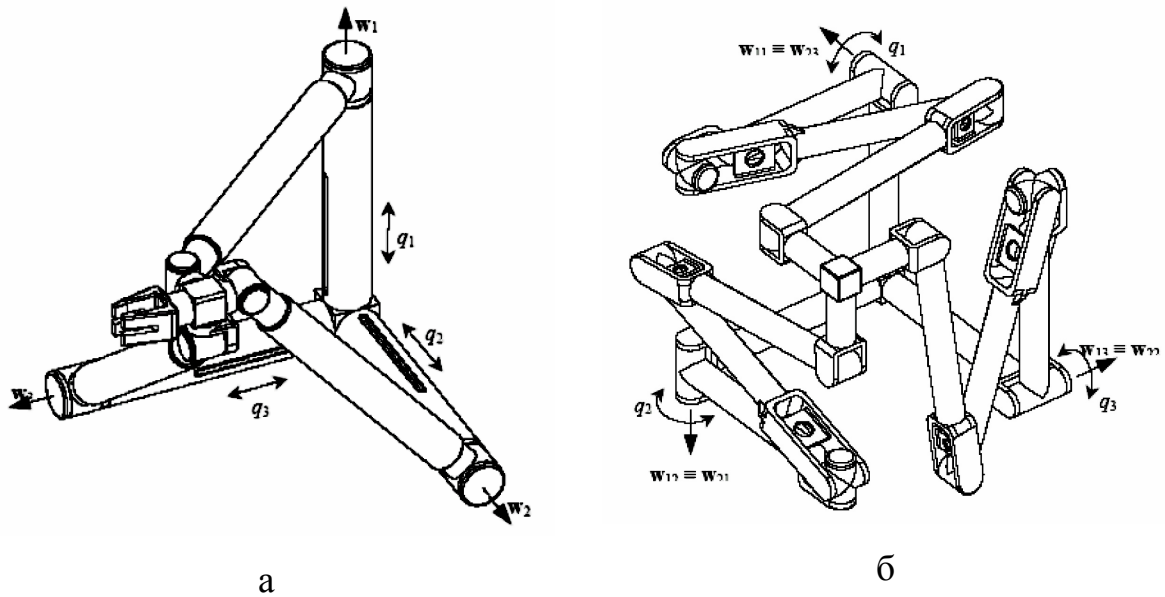


Рис. 1.20. Поступательно-направляющие механизмы:
а – механизм Чарригато с поступательными двигателями;
б – механизм Паренти-Кастелли с вращательными двигателями

Постоянство ориентации выходного звена можно достичь за счет того, что в каждой из трех кинематических цепей установлены два карданных шарнира [227]. Таким образом, три кинематические цепи «отбирают» три возможных вращения.

В сферических механизмах передача движения осуществляется между взаимопересекающимися осями [38, 44, 45]. Предметом исследований сферических механизмов были рабочие зоны [181], вопросы синтеза [183, 187, 192, 201, 202, 205], сингулярностей [180, 243].

Выходное звено представляет собой вращающуюся вокруг трех осей платформу [178, 188] (рис.1.21).

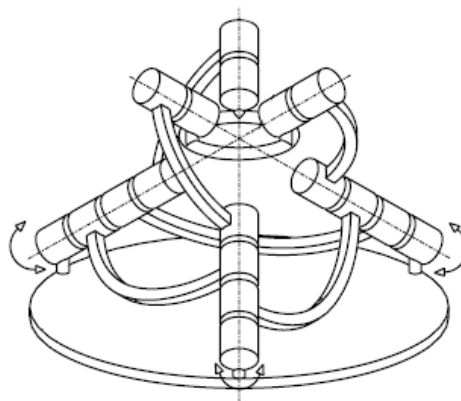


Рис.1.21 Сферический механизм

Он состоит из основания, выходного звена, трех кинематических цепей с совпадающими осями приводных и неприводных пар различных кинематических цепей, что упрощает решение задач о положениях, но усложняет конструкцию.

В сферическом механизме (рис.1.22. а) приводы 3 расположены на цилиндрическом основании 2, могут совершать поступательное движение по направляющим. Каждая цепь содержит по одному промежуточному звену 4, соединенному с приводом цилиндрической парой, а с выходным звеном сферической [220]. Другой сферический механизм (рис.1.22 б) состоит из трех кинематических цепей, с тремя кинематическими парами, а приводы расположены на одной оси.

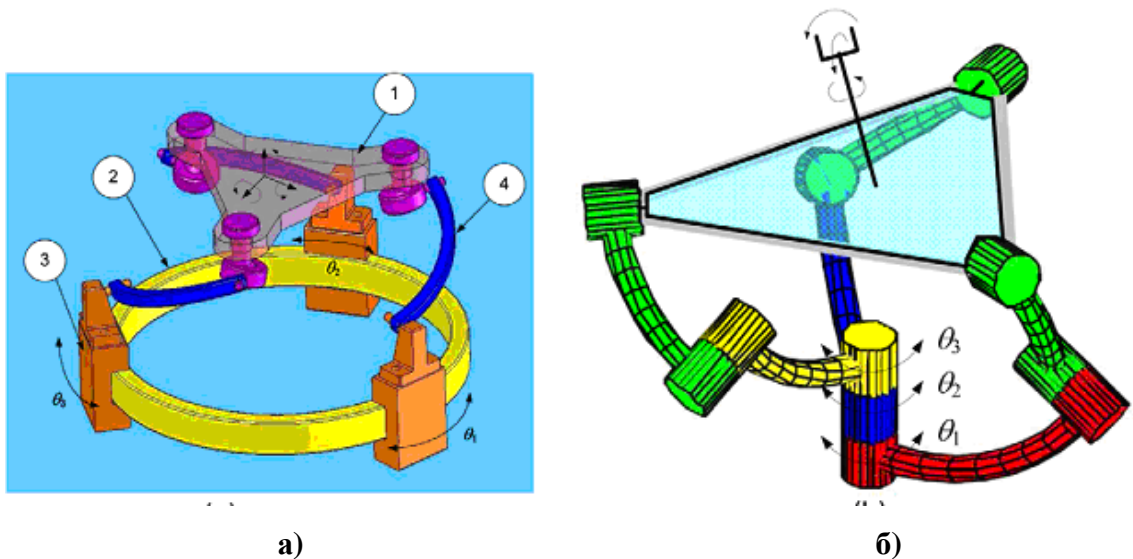


Рис.1.22 Сферический механизм

а – схема механизма, с расположенными приводами на цилиндрических направляющих,

б – схема механизма с расположенными входными парами на одной оси

Также сферический механизм (рис.1.23) может содержать по три вращательные пары, оси которых пересекаются в одной точке, причем оси неприводных пар лежат на несовпадающих осях.

Указанные манипуляторы применяются в устройствах для ориентирования антенн, телескопов, в испытательных стендах, для обработки сферических поверхностей, в смесителях [38, 208].

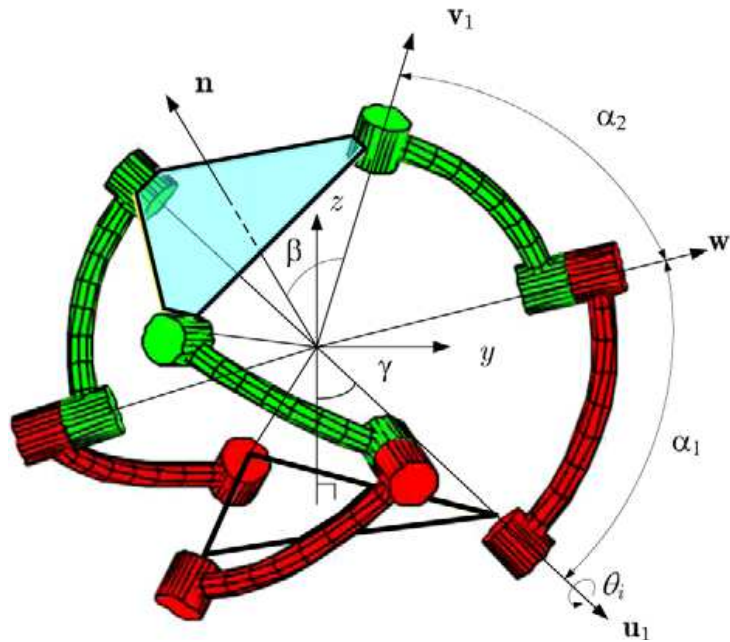


Рис.1.23 Схема сферического механизма

Особенностью пространственных механизмов параллельной структуры может являться частичная или полная кинематическая развязка, что позволяет исследовать механизмы с большим числом степеней свободы [39, 137, 148, 153, 165, 166, 170, 210, 228].

Интерес представляют механизмы с четырьмя степенями свободы, у которых выходное звено совершает поступательные движения, а также вращения вокруг параллельных осей, например, расположенных вертикально. Такие движения иногда называют движениями Шенфлиса [135]. Причем такой механизм обладает свойством частичной кинематической развязки, что позволяет исследовать свойства механизма не с четырьмя, а тремя степенями свободы.

Робот Raminsa, предложенный В. Аракеляном с соавторами, содержит три соединительные кинематические цепи [139, 150], в каждой из которых имеют место механизмы пантографов (рис. 1.24 а). Эту же задачу решает манипулятор с двумя кинематическими цепями, предложенный Д. Анджелесом с соавторами [135]. В данном манипуляторе каждая кинематическая цепь содержит по два привода (рис. 1.24, б).

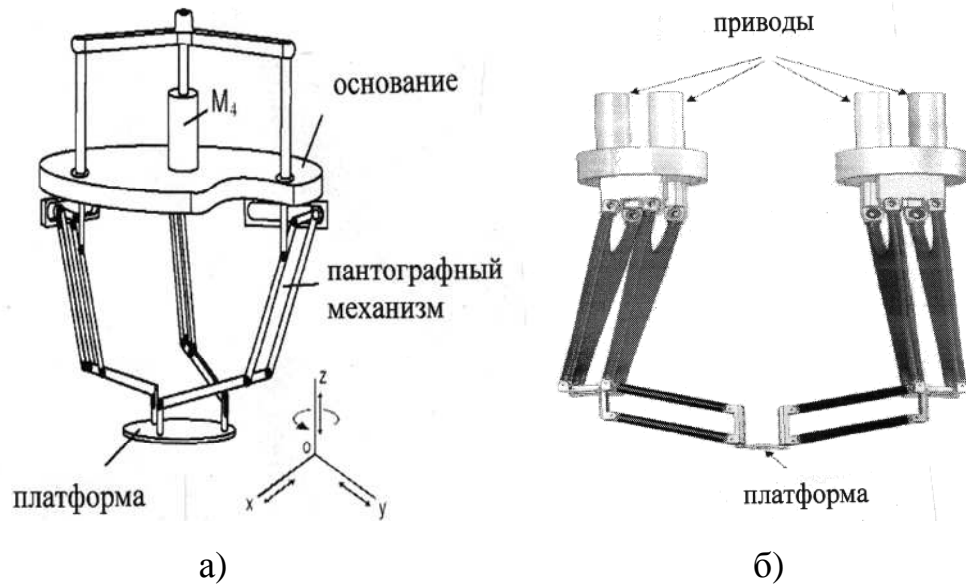


Рис. 1.24 Манипуляторы с четырьмя степенями свободы:
а - манипулятор Raminza, б - манипулятор Анджелеса

Ряд манипуляторов с тремя и четырьмя степенями свободы были разработаны Г. Гогу [172]. В этой работе большое внимание уделено проблеме развязки движений в механизмах параллельной структуры. Движения в данных механизмах требуют согласованного действия целой группы приводов, что усложняет управление. Для решения вопроса были предложены разные решения. В частности, в манипуляторе Delta (с четырьмя степенями свободы) разделены поступательные и вращательные движения, в манипуляторе Raminza с тремя кинематическими цепями вертикальное перемещение и уравнивание веса выполняется одним приводом, а остальные приводы выполняют движения в плоскости. Развязка движений может быть осуществлена на основе использования шарнирных параллелограммов, обеспечивающих взаимные поступательные движения звеньев [89].

При синтезе механизмов с шестью степенями свободы проблема развязки приобретает особое значение. К. Миановски использовал подход, когда вращательные и поступательные двигатели установлены на основании с совмещением их осей (рис. 1.25) [210]. Таким образом, получены две схемы механизмов с тремя степенями свободы в каждом. Другим решением является манипулятор, предложенный И-Минг Ченом с соавторами [238]. В нем поступательные и вращательные

приводы с совмещенными осями также размещены на основании (рис. 1.26). В данном решении использованы поступательные неприводные пары.

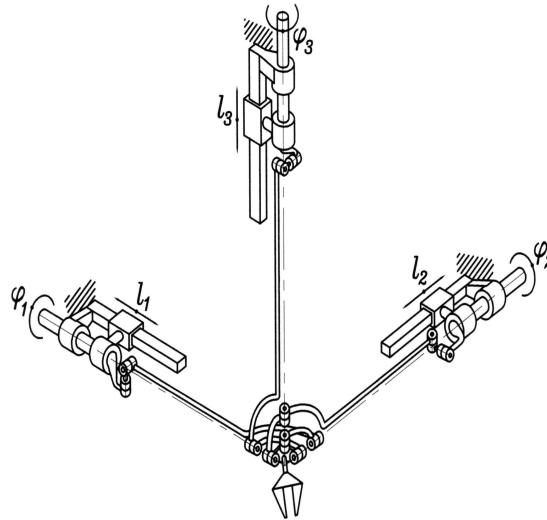


Рис. 1.25 Манипулятор Миановского с развязкой движений:

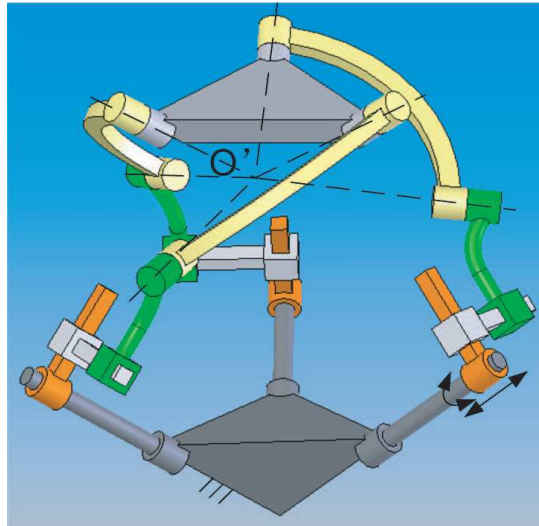


Рис. 1.26 Манипулятор И. Минг Чена с развязкой движений

В механизме (рис.1.27) с четырьмя степенями свободы также можно провести развязку движений, при которой вертикальные перемещения независимы от плоских движений [91]. Используя ту же конструкцию манипулятора и вводя поступательные пары в две цепи, получаем механизмы с пятью и с шестью степенями свободы [87, 88]. В механизме, предложенном В.А. Глазуновым с соавторами, вращательные движения развязаны относительно поступательных движений [90]

Механизмы параллельной структуры в силу взаимного положения соединительных кинематических цепей могут иметь нелинейные динамические характери-

стики. Методы решения соответствующих задач представлены в работе Р.Ф. Ганиева и В.О. Кононенко [22].

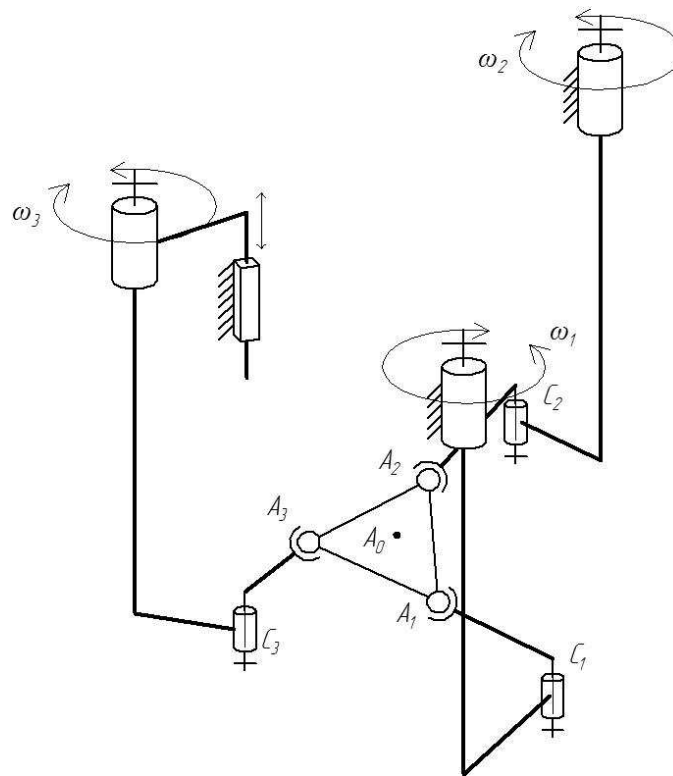


Рис. 1.27 Схема механизма с четырьмя степенями свободы с частичной развязкой

С развитием инфраструктуры наноиндустрии возникает необходимость создания механизмов, устройств и приборов, обеспечивающих перемещение выходного звена в микро- и нанометровом диапазоне [27, 33, 63, 184, 185]. Например, конструктивным узлом измерительного оборудования является двух-трех координатный столик, дающий возможность менять положение образца при исследовании. Обеспечить высокую точность перемещения стола позволяют манипуляторы параллельной структуры, примером которых может служить поступательный механизм (рис. 1.28, а).

Данный манипулятор имеет три замкнутые кинематические цепи, обладает тремя степенями свободы: перемещения вдоль осей x , y , z . Каждая кинематическая цепь содержит одну поступательную и две вращательных кинематических пары. Все кинематические пары являются изгибными, т.е. изготовлены с применением

пластичных материалов, и имеют специфическую геометрическую форму (рис. 1.28 б).

При реверсивном движении выходного звена точность возврата составляет около 400 нм.

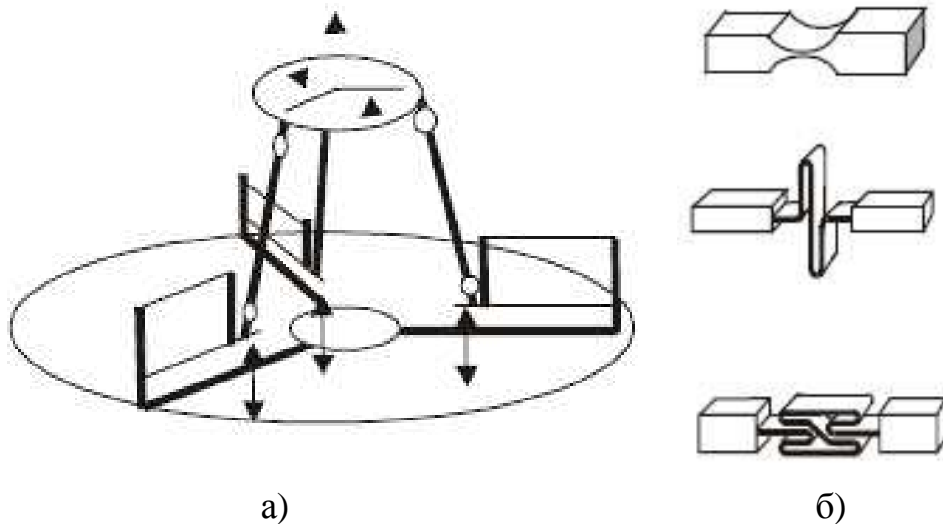


Рис. 1.28 Манипулятор с тремя степенями свободы:

а – кинематическая схема; б - изгибные кинематические пары

Точность обеспечивается применением кинематической цепи параллельной структуры с использованием изгибных кинематических пар наряду с жесткими звеньями. Кинематические пары выполнены в виде изгибных упругих элементов, чтобы исключить возможные люфты и адгезию в агрессивных средах [185].

Механизмы параллельной структуры в силу высоких показателей по грузоподъемности и точности нашли достаточно широкое применение в устройствах для относительного манипулирования инструментом и обрабатываемым изделием (рис.1.29) [29, 30, 62, 65, 73]. Например, при обработке заготовки детали на станке один из механизмов перемещает рабочий инструмент. Другой механизм, удерживающий заготовку, обеспечивает ему дополнительные движения.

Одним из направлений развития механизмов параллельной структуры является создание механизмов с параллельно-переменной структурой, разработанные В.А. Глазуновым, В. Аракелян, С. Брио [140, 141, 168]. В этих механизмах при приближении к особым положениям, происходит переключение приводов хотя бы одной кинематической пары.

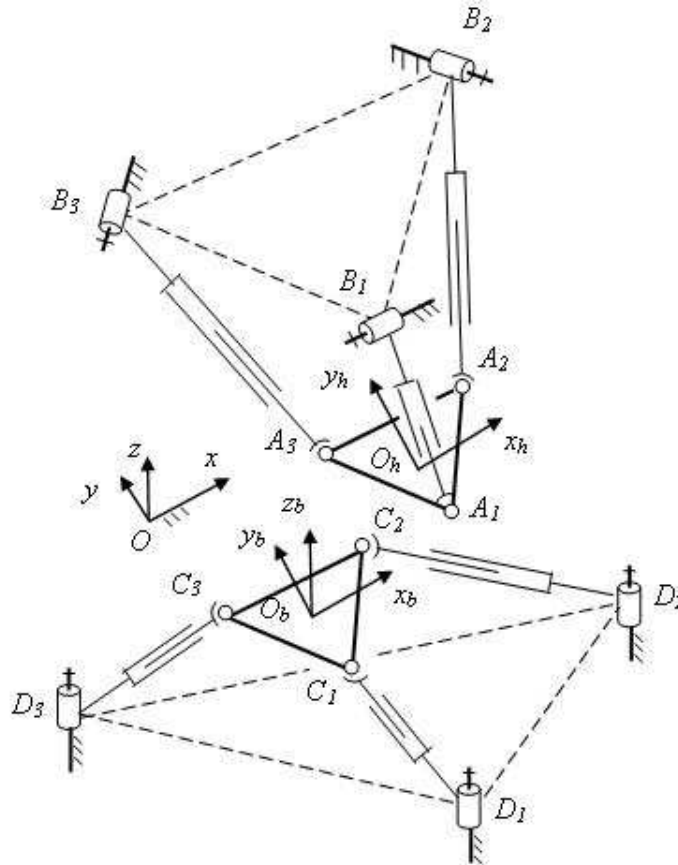


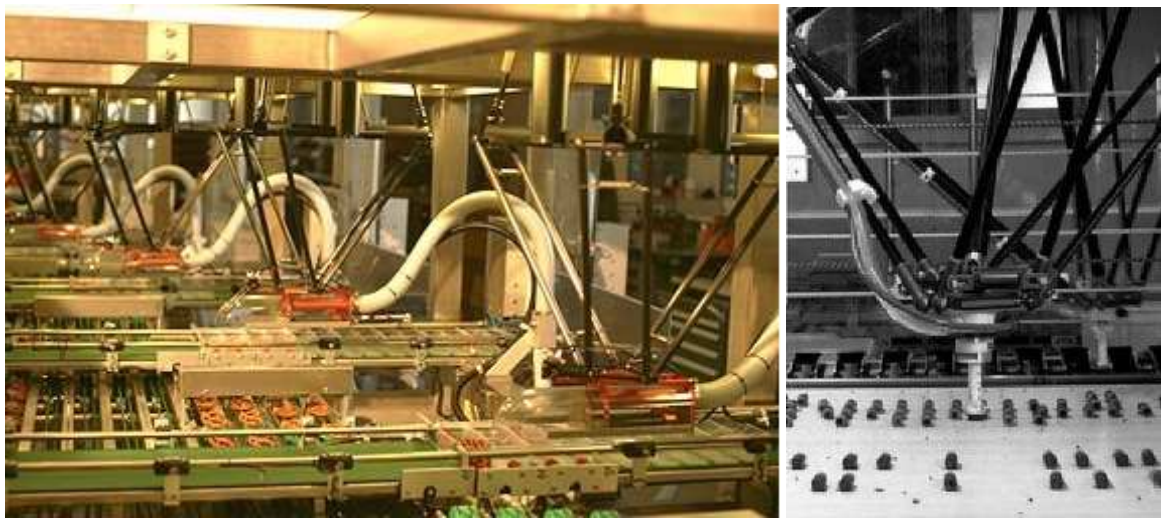
Рис. 1.29 Механизм относительного манипулирования

Таким образом, механизмы параллельной структуры образуют обширный класс механизмов с уникальными свойствами.

1.3. Практическое применение роботов параллельной структуры

Механизмы параллельной структуры находят все более широкое применение в качестве исполнительных органов разнообразных машин, автоматов, станков и устройств в различных отраслях промышленности (машиностроение, приборостроение, полиграфическая промышленность, медицинская техника, сельское хозяйство и др.).

Так, известный механизм Delta (рис. 1.30) впервые был применен в установке для упаковки кондитерских изделий, хлебобулочных изделий и лекарств [146].



а)

б)

Рис. 1.30 Установки на базе механизма Delta для упаковки:

а – хлебобулочных изделий,

б - кондитерских изделий

Робот больших размеров (длиной звеньев более 800 мм) нашел применение для ориентирующих движений, например, хирургического оборудования (массой до 20 кг) (рис. 1.31). Главным преимуществом предложенной схемы является её повышенная маневренность и расширенная граница рабочей зоны [146].

На базе механизма Delta создан манипулятор, позволяющий работать в качестве аппарата искусственного дыхания с частотой 100 ударов в минуту и амплитудой 4-5 см [239]. В таком роботе реализована функция не перемещения, а силового и вибрационного действия.

Параллельные механизмы используют в стендах на базе механизма «трипод» для тренировки пилотов. Стенды могут иметь три степени свободы (рис. 1.32 а) и четыре степени свободы (рис. 1.33 б) [190, 198]. В схеме с тремя степенями свободы ведущие двигатели расположены в поворотных шарнирах основания, а штанги имеют постоянную длину. Этим обеспечивается относительно меньшая масса самого устройства и большая скорость перемещения исполнительного узла, чем у механизма, выполненного по схеме гексапод



Рис. 1.31. Манипулятор Delta для перемещения медицинского оборудования



а)



б)

Рис. 1.32 Стенды для тренировки пилотов:

а - стенд с тремя степенями свободы, б - стенд с четырьмя степенями свободы

Гексапод является примером параллельного механизма с шестью степенями. Он выполнен на базе шести механизмов поступательного перемещения. Одним концом штанга шарнирно соединена с основанием, а другим (также шарнирно) - с подвижной платформой, на которой установлен рабочий орган. Управляя вылетом штанг по программе, можно управлять положением выходного звена.

На практике схема гексапода реализована в виде многоцелевого фрезерного станка OKUMA PM-600 (рис 1.33) [208].

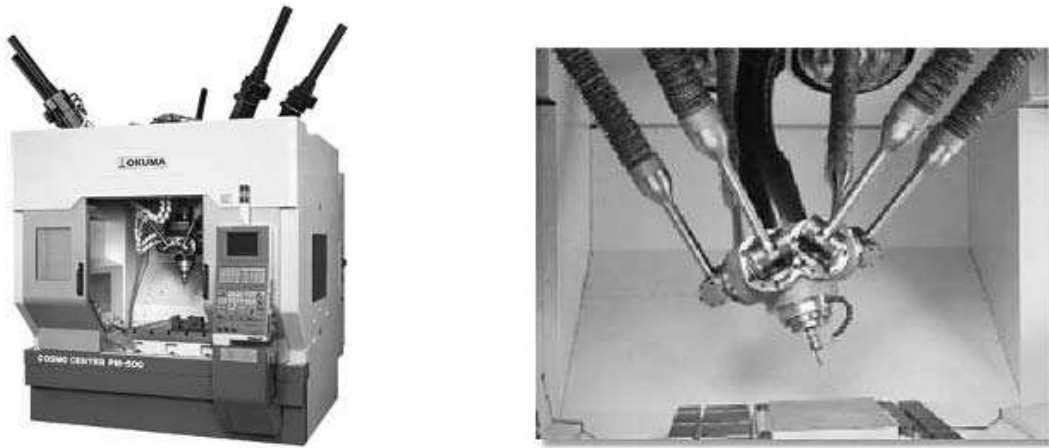


Рис. 1.33. Обрабатывающий центр OKUMA PM-600

Гексапод с шестью степенями свободы используется в механизме медицинской кушетки для ориентации пациента при лучевой терапии. Грузоподъемность механизма составляет 185 кг, а точность позиционирования равна 0,1 мм [221].

Параллельные роботы на базе гексапода используются для контроля ориентации антенны (рис.1.34), их особенностью в данном случае является небольшой размер привода по сравнению с размером тарелки антенны [162, 208].

Кроме того подобные роботы широко применяются в качестве базовых механизмов хирургического инструмента [221] при проведении операций на позвоночнике (рис.1.35, а, б), в нейрохирургии (рис. 1.36) [235]. Точность позиционирования хирургического инструмента составляет 20 мкм.

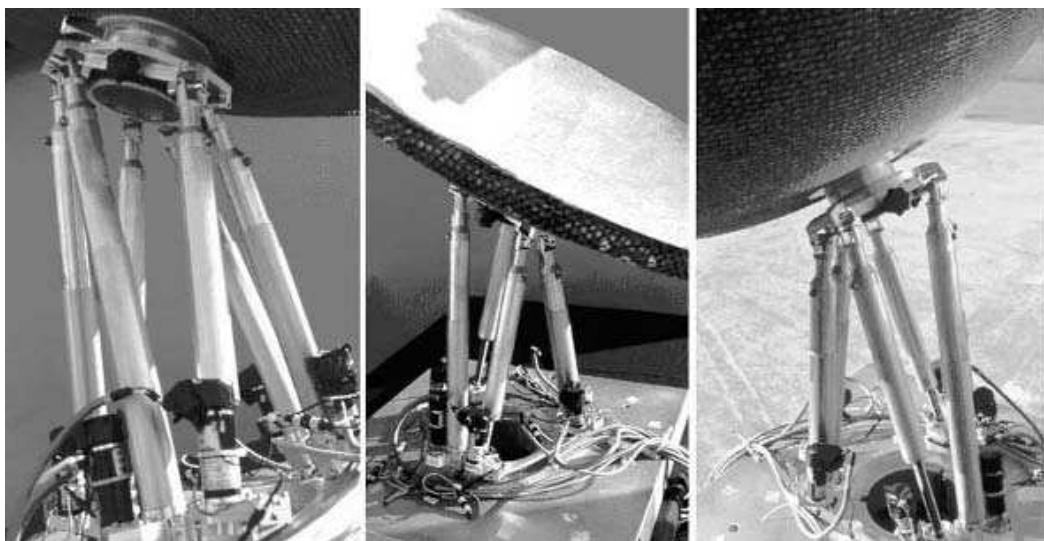
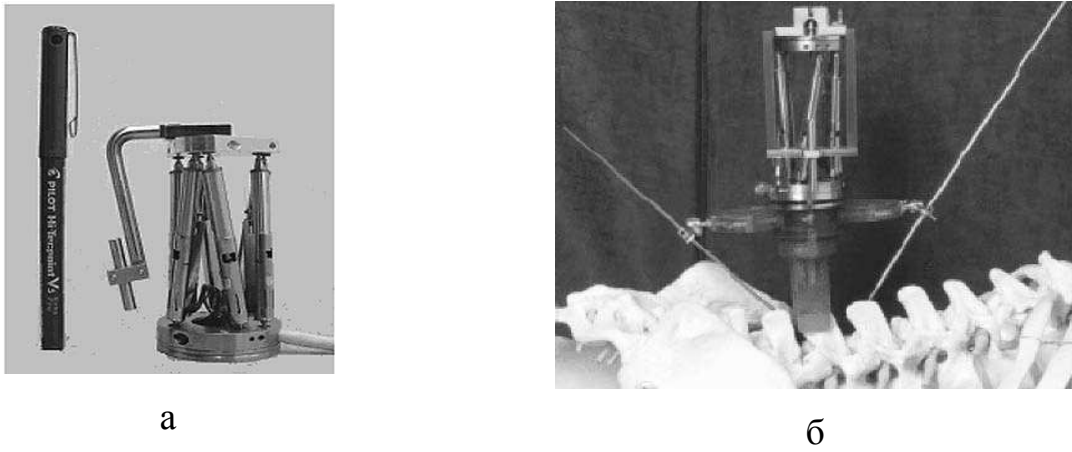


Рис. 1.34. Механизмы контроля ориентации антенны на базе гексапода



**Рис.1.35 Хирургический нож для операций на позвоночнике:
а - общий вид; б - в работе**

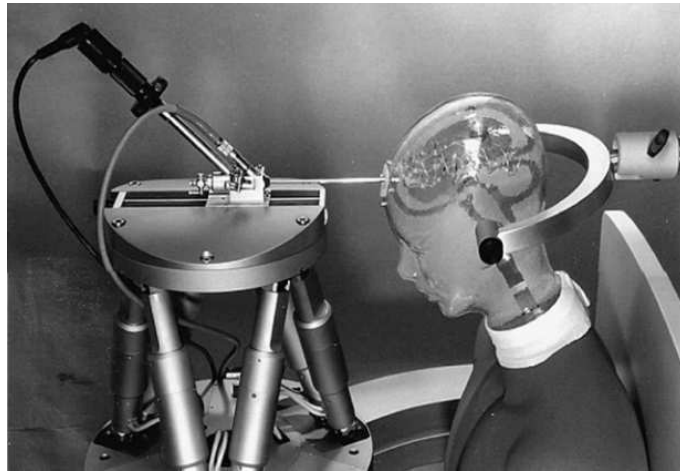


Рис.1.36 Операционный стол на базе гексапода

Пространственные сферические механизмы с двумя и более степенями свободы широко применяются в смесительных машинах (рис.1.37) и в целом ряде аналогичных устройств [38].

Учитывая, что приводы расположены на основании, а выходное звено может работать в рабочей области, например в агрессивной среде, был разработан механизм для испытаний моделей летательных аппаратов в аэродинамической трубе (рис. 1.38). Такой механизм имеет шесть степеней свободы и два стержня-ввода в рабочую область. Кроме того, здесь возможна частичная кинематическая развязка – три привода управляют положением выходного звена, а три его ориентацией.

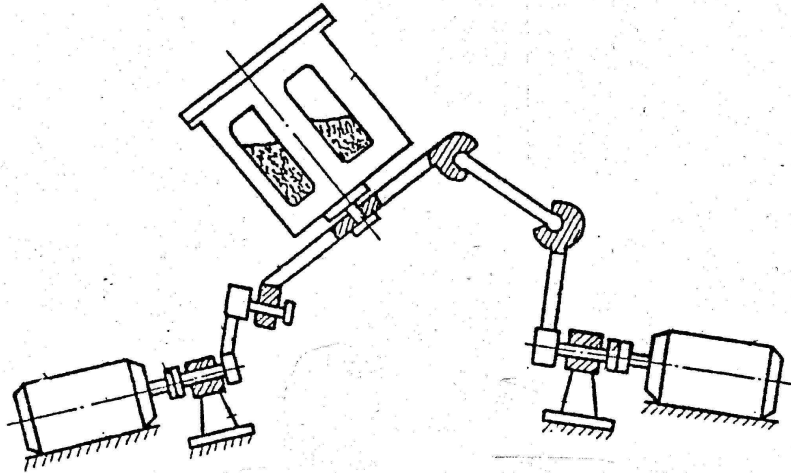


Рис. 1.37 Схема смесителя

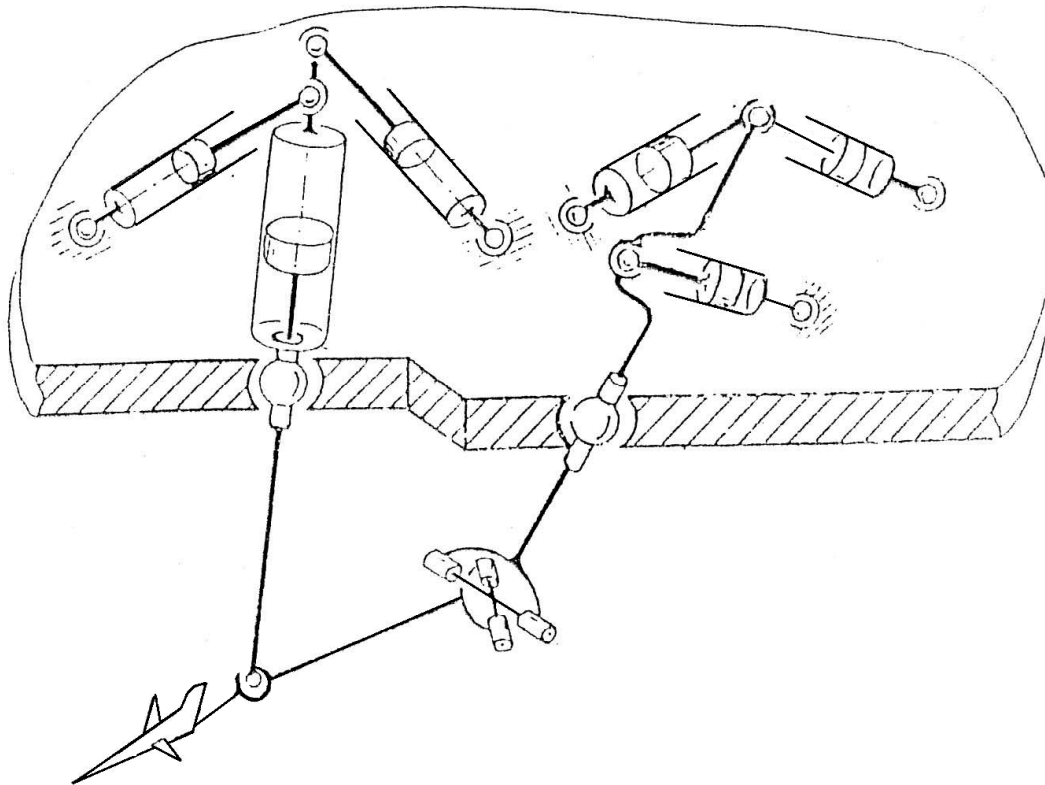


Рис. 1.38 Манипулятор для испытаний моделей летательных аппаратов

Плоские механизмы находят применение в машиностроении – для сварки и резки сложных профилей, в пищевой промышленности – для оформления кондитерских изделий (рис. 1.39) [67, 92].

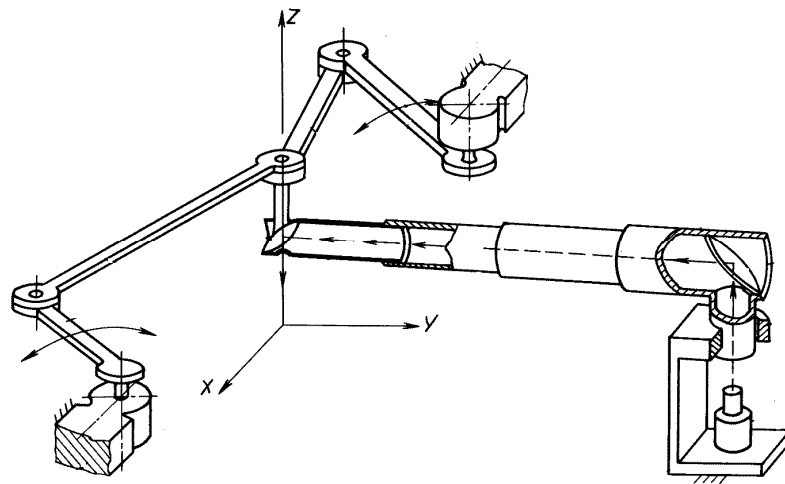


Рис. 1.39 Плоский механизм (для лазерной резки)

Также механизмы с шестью степенями свободы могут найти применение в механизмах с гибкой связью (рис.1.40) [218].



Рис. 1.40 Механизм с гибкими звеньями

Механизмы параллельной структуры используются при моделировании биологических конструктивных систем, в частности при моделировании протеза руки (рис.1.41 а) [208, 232], работы челюстных мышц (рис.1.41 б) [215].

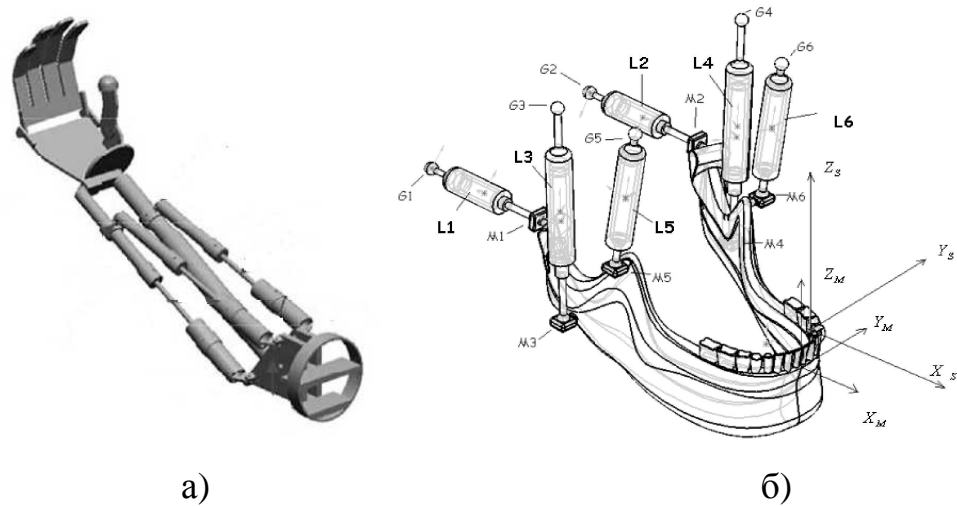


Рис.1.41 Модель биологических систем

а – протез руки,

б – моделирование мышц челюсти

Многоконтурные пространственные кинематические цепи могут иммитировать модели кристаллических структур [24].

Приведенные примеры показывают широкое практическое применение манипуляторов параллельной структуры в различных отраслях промышленности. При решении вопросов модернизации производства за счёт автоматизации технологических процессов, особенно требующих полной замены человеческого труда в недоступных местах, необходимость создания механизмов, рабочий орган которых совершает сложные пространственные движения, резко возрастает.

Внедрение манипуляторов параллельной структуры является перспективным и актуальным с точки зрения модернизации предприятий текстильной и легкой промышленности.

1.4 Методы исследования механизмов параллельной структуры

Исследования пространственных механизмов параллельной структуры строятся на общих методах теории механизмов и машин, что нашло отражение в трудах таких классиков как И.И. Артоболевского [5, 6, 7], Н.Г. Бруевича [15], А.П. Бессо-

нова [11], Ф.М. Диментберга [41–43], Е.И. Воробьева [19], В.В. Добровольского [44], В.А. Зиновьева [49], К.В. Фролова [59, 105], А.Ф. Крайнева [64–66], П.А. Лебедева [74], Н.И. Левитского [75], А.П. Малышева [78], П.Н. Белянина [9], К. Ханта [189], Б. Росс [207, 216, 227], К. Уолдрон [234], Д. Даффи [211], Ж. Эрве [186], К. Вольхарт [237], Р. Войня и М. Атанасиу [229], И.М. Соболев, Р.Б. Статникова [103], П.Г. Мудрова [81], Решетова Л.Н [99], М. Шахинпура [128], Ф.Л. Черноусько, Н.А. Болотник [127], Г.В. Крейнина [52], Г.Б. Иосилевича [50] и многих других.

Значительный вклад в теорию разработки и практику применения манипуляционных механизмов параллельной структуры внесли такие отечественные и зарубежные ученые как Ф.М. Диментберг [43], В.А. Глазунов, А.Ф. Крайнев [24, 27, 28], С.Г. Кислицын [51], Ж.П. Мерле [209], Д. Анджелес [138], К. Госслен, Д. Анджелес [178], Хант [189, 190], Х. Конг [194], Ж. Эрве [186], Д. Гогу [172, 173], Л. Цай [230, 231], Л. Бонев [147], В. Аракелян [141, 149] и другие.

Вопросы синтеза механизмов параллельной структуры рассмотрены в трудах В.А.Глазунова [131, 167, 200], Д. Анджелеса [136, 138, 229], М. Черрикато, В. Паренти-Кастелли [151], О. Компани [159], Г. Гогу [174], К. Госслена [179], А. Хара [184], С. Худа, Ю. Такеда [188], К. Конг, К. Госслена [194, 195, 196], Р. Вишер, [232], К.И. Заблонского [46].

Исследование механизмов неразрывно связано с вопросами управления. К числу трудов по этой проблематике относятся работы Р.Пола [94], К Ханта [108], Д. Анджелеса [138, 178], М. Чекарелли [154], А.А. и А.Е. Кобринских [54], М.З. Коловского и А.В. Слоуща [57], А.И. Корендясева, Б.Л. Саламандры и Л.И. Тывеса [69], В.С. Медведева, А.Г. Лескова и А.С. Ющенко [80], Е.П. Попова, А.Ф. Верещагина и С.П. Зенкевича [95], Зенкевича С.Л., Ющенко А.С. [160], Д. Крэг [160], Л.П. Леонова [76] и ряда других авторов.

Основными задачами при исследовании пространственных механизмов параллельной структуры являются:

- структурный синтез т.е. разработка кинематической схемы. При этом определяют его структуру и количество кинематических цепей, тип кинематических пар и конфигурацию соединительных звеньев. Синтез параллельных механизмов

проводят на основе использования структурных формул для расчета подвижности выходного звена [27, 43,77].

- вывод уравнений связи между абсолютными координатами выходного звена и обобщенными (независимыми) координатами;
- решение задачи о положениях на базе полученных уравнений связи, показывающее взаимосвязь между входными и выходными координатами.
- определение рабочего пространства манипулятора на основе анализа уравнений связей.
- определение скоростей, ускорений и особых положений механизма. В данных положениях структура механизмов нарушается, они могут потерять одну или несколько степеней свободы, либо может быть потеряна управляемость;
- динамический анализ механизма позволяет на основе уравнения движения механизма определить усилия в приводах;
- расчетное обоснование точности;
- задачи управления – обеспечение движения выходного звена по заданному закону.

При решении задач кинематического анализа как правило составляются уравнения связей. Для определения скоростей, ускорений и особых положений используют дифференцирование уравнений связей. Однако, эти же задачи можно решить и методом винтового исчисления.

Винтовой метод исследования пространственных механизмов является одним из наиболее эффективных методов в данной области. Начало теории винтов положила работа Р. Болла [144]. В работе показано, что все возможные движения относятся к винтовым перемещениям или представляют собой комбинации этих винтов. Подобную задачу приходится решать для различных пространственных механизмов, имеющих в том числе и параллельную структуру.

Теория винтов была развита в трудах таких исследователей, как А.П. Котельников [60], Д.Н. Зейлигер [47], П.О. Сомов [104], Ф.М. Диментберг [41–43], Е.И. Воробьев [19].

Винт – это геометрический образ, к которому приводится произвольная система скользящих векторов. Винт R характеризуется вектором r и моментом r° , а также осью винта, для всех точек которой направления вектора и момента совпадают.

Любой винт может быть определен шестью плюккеровыми координатами, три из которых – проекции вектора на координатные оси, три других – проекции момента винта относительно начала координат на те же самые оси координат. Одним из первых в теории механизмов винтовой метод применил Ф.М. Диментберг. В дальнейшем теорию винтов в разных аспектах применяли многие исследователи. К. Хант [108, 190] рассматривал винтовые движения звеньев механизмов и одним из первых обратил внимание на механизмы параллельной структуры. Б. Росс с соавторами [100, 207] исследовал винтовые параметры конечных перемещений твердого тела, критерии передачи движения, решения задач о положениях, избыточные связи. К. Уолдрон [234] использовал винтовой подход, а также свойства симметрии для отыскания механизмов с избыточными связями. К. Вольхарт [237], используя винтовой метод, получил многоконтурные механизмы с избыточными связями. Ж. Эрве [186], Л. Цай [230], Д. Анджелес [138], К. Гослен и К. Конг [194, 195, 196, 197], И Минг Чен с соавторами [234], К. Сугимото [225, 226], К. Фуджимото [164], Чекарелли [155, 156], Д. Златанов [244] использовали аппарат групп винтов для синтеза механизмов параллельной структуры. М. Мохаммед и Д. Даффи [211], а также Хуан Зен [242] с использованием винтового подхода определяли возможные движения таких механизмов.

В работах В.А. Глазунова и его коллег [18, 24, 25, 32, 40] были применены группы винтов для синтеза и анализа пространственных механизмов, для отыскания механизмов с избыточными связями, для определения особых положений. В частности был разработан алгоритм, позволяющий найти движения выходного звена внутри зоны особых положений. Установлено, что размерность этих зон на единицу меньше, чем число степеней свободы механизма.

Таким образом, можно утверждать, что винтовой метод является одним из самых эффективных подходов в исследовании пространственных механизмов и

его значение постоянно возрастает. Этот метод позволяет при анализе особых положений, получить результат, не прибегая к сложным выкладкам. На основе концепции структурных групп может быть исследована структура пространственных механизмов.

1.5. Классификация механизмов параллельной структуры для плоских, вращательных и поступательных движений.

Важным этапом исследования механизмов параллельной структуры является их классификация. Классификация механизмов проводилась в работах К. Ханта [108] , А. Ш. Колискора, А.Ф.Крайнева, В.А.Глазунова [27, 28], В.А. Глазунова [24, 30], позволяющая синтезировать новые схемы.

В результате изучения операций, связанных с применением роботов в текстильной и легкой промышленности удалось выяснить, что, как правило, данные роботы не нуждаются в шести степенях свободы. Наиболее востребованными являются плоские, поступательно-направляющие и сферические механизмы.

Плоские могут примеряться при раскрое, шитье и т.д., когда инструмент перемещается относительно материала, либо имеет передвижение рабочего стола. Поступательно-направляющие робототехнические системы применяются в операциях переноса и манипулирования объекта. При этом зачастую не требуется ориентирующие движения, если же они необходимы, то можно добавить одну степень свободы, не меняя общую конструкцию манипулятора.

Сферические робототехнические системы востребованы в операциях обработки объемных криволинейных поверхностей (шитье и нанесение узоров на головные уборы, кожанно-обувные изделия и т.п.). Если необходима дополнительная линейная степень свободы, ее можно добавить, не меняя общую конструкцию механизма.

Классификация механизмов для плоских, поступательных и вращательных движений проведена с использованием разных групп винтов [27, 28]. Для этого используем формулу:

$$W = 6 - \sum_{i=1}^k D_i \quad (1.1)$$

где W – число степеней свободы

D – число связей, налагаемых i -й кинематической цепью

k – число кинематических цепей, $i=1, \dots, k$.

$$D = -6 \cdot n_i + 5 \cdot p_{5i} + 4 \cdot p_{4i} + 3 \cdot p_{3i} + 2 \cdot p_{2i} + p_{1i} \quad (1.2)$$

где n_i – число промежуточных звеньев, расположенных между основанием и выходным звеном,

$p_{5i}, p_{4i}, p_{3i}, p_{2i}, p_{1i}$ – число кинематических пар с 1, 2, 3, 4, 5 подвижностями в i -й кинематической цепи.

Классификацию и синтез механизмов параллельной структуры можно проводить на основании формул (1.1), (1.2). Каждая кинематическая цепь содержит привод или накладывает связи на движения выходного звена. Классификация механизмов представлена в таблице 1.1. (подчеркивание означает, в цепи все пары соответствуют винтам замкнутой группы).

Классификация проведена по следующим признакам: числу степеней свободы W , числу кинематических пар, числу налагаемых связей каждой цепью. В первой строке обозначено количество кинематических цепей и число налагаемых связей этой цепью, цифра в скобках указывает число приводных пар в кинематических цепях, под которыми эти цифры расположены). Подчеркнутые цифры обозначают цепи с общими связями (для сферических – все вращательные пары пересекаются в одной точке, для плоского – три вращательные; одна поступательная две вращательные; две поступательные и одна вращательная, все вращательные параллельны, все поступательные).

Отметим, что плоские, поступательно-направляющие и сферические механизмы соответствуют замкнутым трехчленным группам винтов. В связи с этим, для них могут применяться редуцированные формулы, соответствующие пространству равным трем.

Для рассматриваемой группы это можно выразить структурной формулой:

$$W = 3 - \sum D_i \quad (1.3)$$

где W – число степеней свободы, D_i – число связей, налагаемых i -й кинематической цепью; $i = 1 \dots k$;

k – число кинематических цепей.

Величину D_i определяют как

$$D_i = -3 \cdot n_i + 2 \cdot p_{5i} \quad (1.4)$$

где n_i – число промежуточных звеньев, расположенных между основанием и выходным звеном,

Таблица 1.1.

Классификация механизмов параллельной структуры,
соответствующих трехчленным группам

W	Число соединительных цепей k						
3	3						
	<u>333</u> (111)	<u>663</u> (111) (210)	<u>563</u> (111) (210) (120) (030)	<u>563</u> (111) (210) (300)	<u>555</u> (111) (210) (300)	<u>633</u> (111) (210) (300)	<u>533</u> (111) (210) (300)
3	2						
	<u>33</u> (21)	<u>63</u> (21) (30) (12)	<u>53</u> (21) (12) (30)				
1	3						
	<u>322</u> (100)	<u>622</u> (100)	<u>652</u> (100)	<u>552</u> (100)			
2	3						
	<u>332</u> (110)	<u>662</u> (110)	<u>652</u> (110)	<u>552</u> (110)			
2	2						
	<u>32</u> (20) (11)	<u>62</u> (11) (20)	<u>52</u> (11) (20)				
1	2						
	<u>31</u> (10)	<u>61</u> (10)	<u>51</u> (10)	<u>22</u> (10)			

Однако, механизм может содержать кинематические цепи, которые соответствуют, либо не соответствуют замкнутым группам винтов. В связи с этим, для разных цепей могут быть использованы разные структурные формулы.

Классификация может быть дополнена случаями, когда механизм добавлена четвертая (пятая) цепь кинематические цепи, содержащая приводы, остальные цепи при этом будут лишь налагать связи (таблица 1.2).

Таблица 1.2.

Классификация механизмов параллельной структуры,
с четырьмя кинематическими цепями

W	Число соединительных цепей k				
3	4				
	6663 (1110)	6653 (1110)	6553 (1110)	5553 (1110)	6555 (3000) (2100) (1110)

Таким образом, проведенная классификация позволяет синтезировать механизмы параллельной структуры, учитывая степени свободы, количество приводных пар и кинематических цепей.

Выводы по главе 1

1. На предприятиях текстильной и легкой промышленности в технологических процессах и операциях применяются разнообразные манипуляционные механизмы в основном последовательной структуры. Наиболее востребованными являются плоские, поступательно-направляющие и сферические механизмы.
2. Современной тенденцией развития робототехники является создание пространственных манипуляционных механизмов параллельной структуры с различным числом степеней свободы. Манипуляционные механизмы параллельной структуры компактнее, проще по конструкции и дешевле аналогичных механизмов по сравнению с механизмами последовательной структуры. Они находят широкое

применение в различных отраслях. При решении вопросов модернизации производства, требующего замену ручного труда, осуществления операций в труднодоступных местах, необходимость создания механизмов, исполнительный орган которых совершает сложные движения, возрастает.

3. Для выполнения технологических операций с полуфабрикатами и изделиями в текстильной и лёгкой промышленности достаточно манипуляторов с тремя степенями свободы.

4. В связи с этим целью настоящей работы является разработка методов создания механизмов параллельной структуры с тремя степенями свободы для поступательных, вращательных, плоских движений с учетом кинематических, динамических свойств, управления и сингулярностей. При исследовании манипуляционных механизмов параллельной структуры наиболее эффективным является метод винтового исчисления. Он позволяет решать вопросы кинематического и динамического анализа, не прибегая к сложным расчетам.

5. Предложена классификация механизмов, позволяющая синтезировать манипуляционные механизмы параллельной структуры для плоских, вращательных и поступательных движений с различным числом кинематических пар и цепей.

ГЛАВА 2. СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ, КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

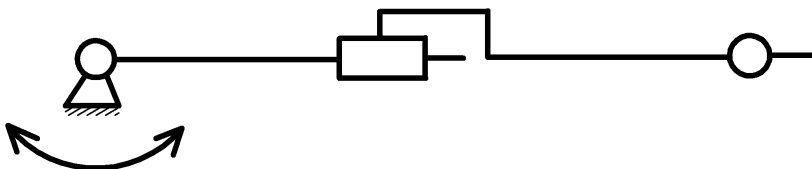
В главе рассматриваются вопросы структурно-параметрического синтеза, а также кинематический и динамический анализ плоских манипуляционных механизмов параллельной структуры. Структурно-параметрический синтез проводится на основе структурных формул разных размерностей. Кинематический и динамический анализ проводится на основе связей, налагаемых кинематическими цепями, а также на основе винтового исчисления

2.1. Синтез плоских механизмов

В параграфе рассмотрен структурно-параметрический синтез плоских механизмов с тремя степенями свободы и тремя кинематическими цепями. Такие механизмы содержат три привода в каждой кинематической цепи и могут совершать два поступательных движения и одно вращательное [5, 24].

Кинематические цепи могут состоять:

- из одной вращательной пары и двух поступательных (рис.2.1 а, б, в), причем оси вращательной пары перпендикулярны осям поступательных,
- из двух вращательных пар и одной поступательной (рис.2.2 а, б, в), где оси вращательных пар перпендикулярны оси поступательной,
- из трех вращательных пар (рис.2.3) и их оси параллельны.



а)

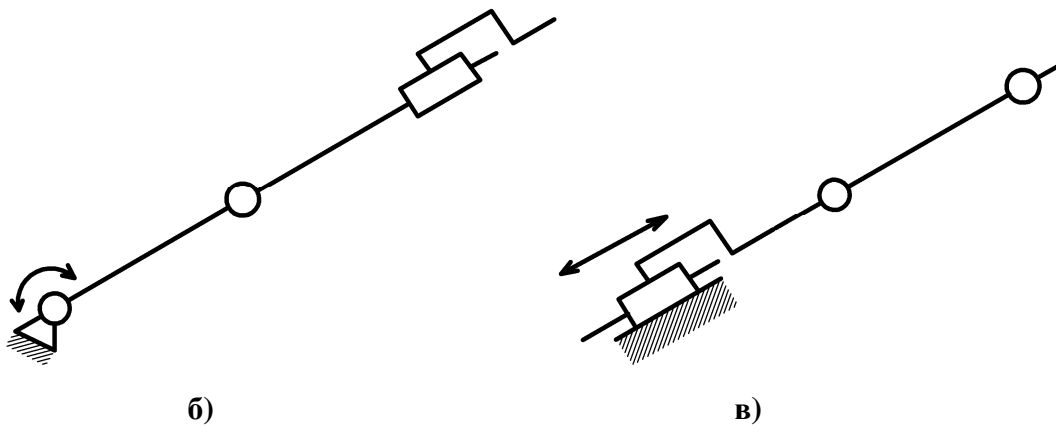


Рис.2.1. Кинематическая цепь с одной поступательной и двумя вращательными парами с разной последовательностью кинематических пар

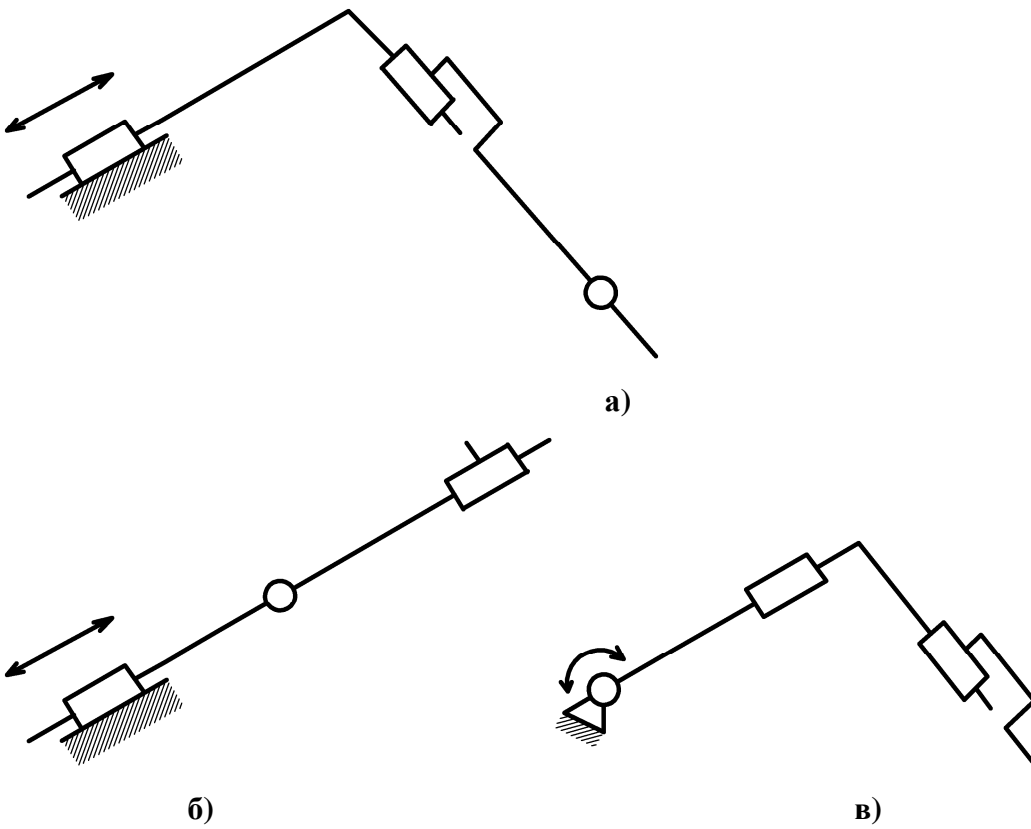


Рис.2.2. Кинематическая цепь с одной вращательной и двумя поступательными парами с разной последовательностью кинематических пар

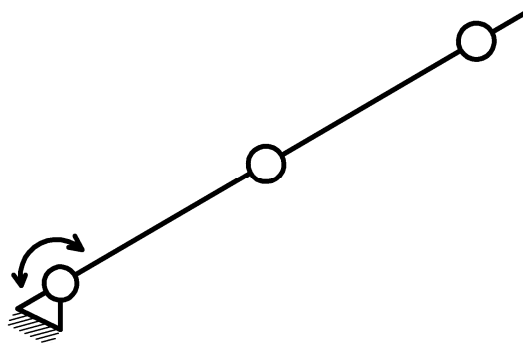


Рис.2.3. Кинематическая цепь с тремя вращательными парами

Поступательная пара может быть выполнена в виде шарнирного параллелограмма (рис.2.4). В отличие от обычной поступательной пары шарнирный параллелограмм не характеризуется постоянным направлением поступательного перемещения.

Рассматриваемые механизмы могут строиться по двум принципам:

- все кинематические цепи налагают по три одинаковые связи
- каждая кинематическая цепь налагает по одной связи.

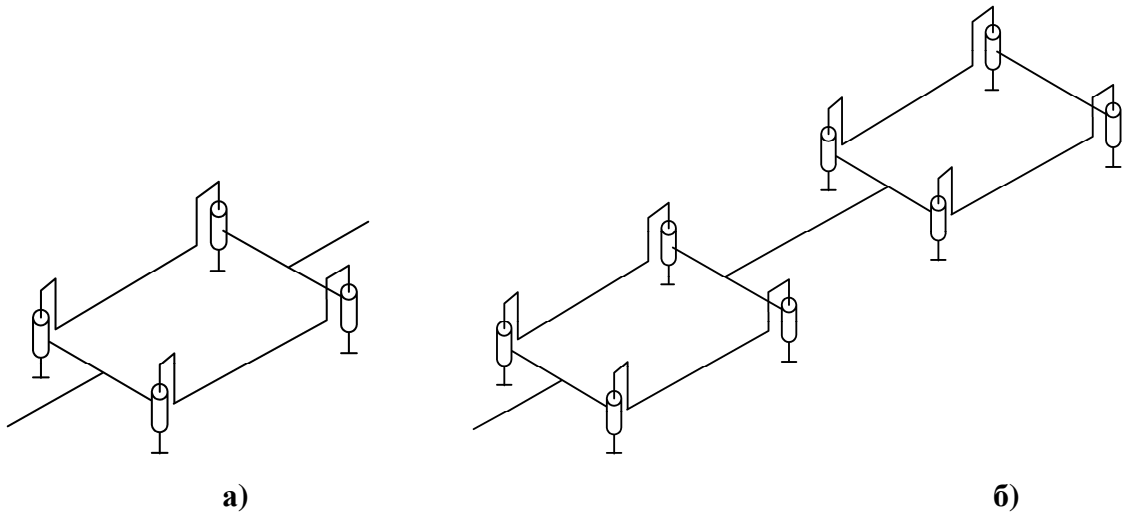
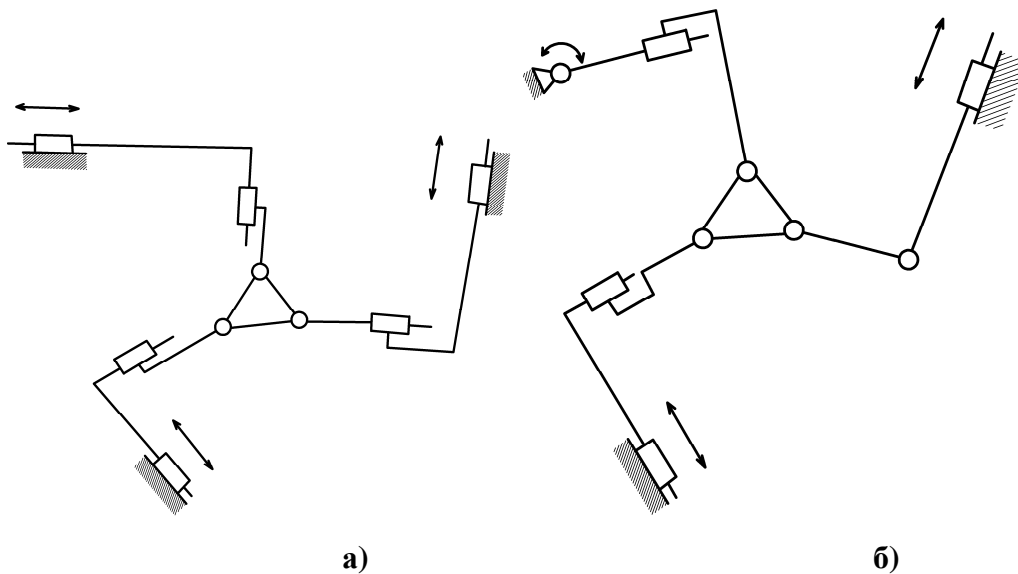


Рис.2.4. Поступательная пара, выполненная в виде

а – одного шарнирного параллелограмма б – двух шарнирных параллелограммов

Рассмотрим схемы механизмов построенных по принципу, когда каждая кинематическая цепь накладывает по три одинаковых связи.



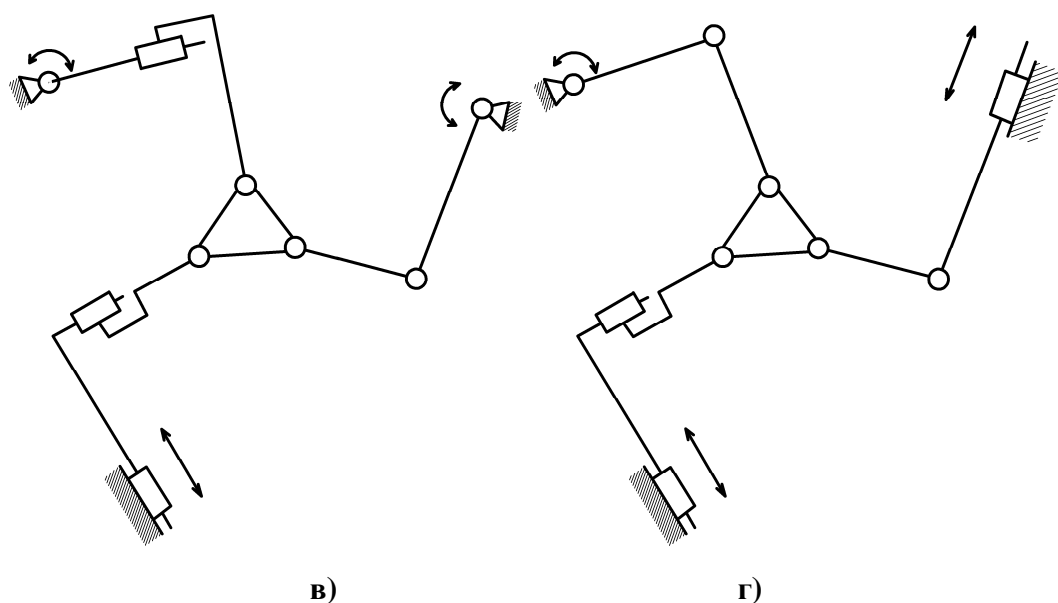


Рис. 2.5. Кинематические схемы, в которых кинематические цепи налагают по три одинаковые связи
а – 3PPR, б – RPR, PRR, PPR,
в – PPR, RRR, RPR, г – PPR, RRR, PRR

Эти кинематические цепи налагают три связи: два момента M_x , M_y и силу R_z (рис 2.6.). Так как все три кинематические цепи налагают одинаковые связи, так что между выходным звеном и основанием можно установить еще любое количество таких цепей, и число степеней свободы останется равным трем.

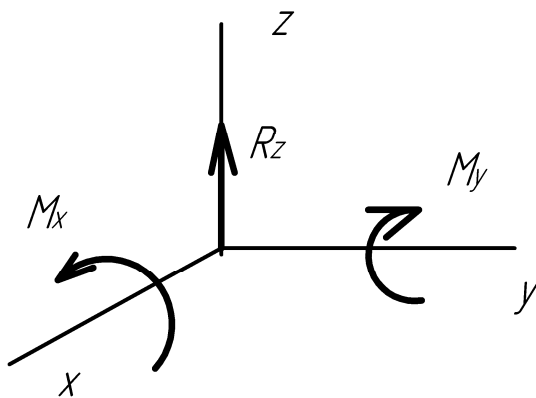


Рис. 2.6. Связи, накладываемые кинематическими цепями

Для определения числа степеней свободы используем структурную формулу П.Л. Чебышева для плоского механизма:

$$W = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot p_5 - p_4 \quad (2.1)$$

где n – число звеньев;

p_5 – число пар пятого класса (одноподвижных пар);

p_4 – число пар четвертого класса (двухподвижных пар).

Согласно уравнению (2.1) число степеней свободы плоского механизма равно :

$$W = 3 \cdot (8 - 1) - 2 \cdot 9 = 3$$

Подсчитаем число степеней свободы для плоского механизма на рис.2.5 по формуле Сомова – Малышева:

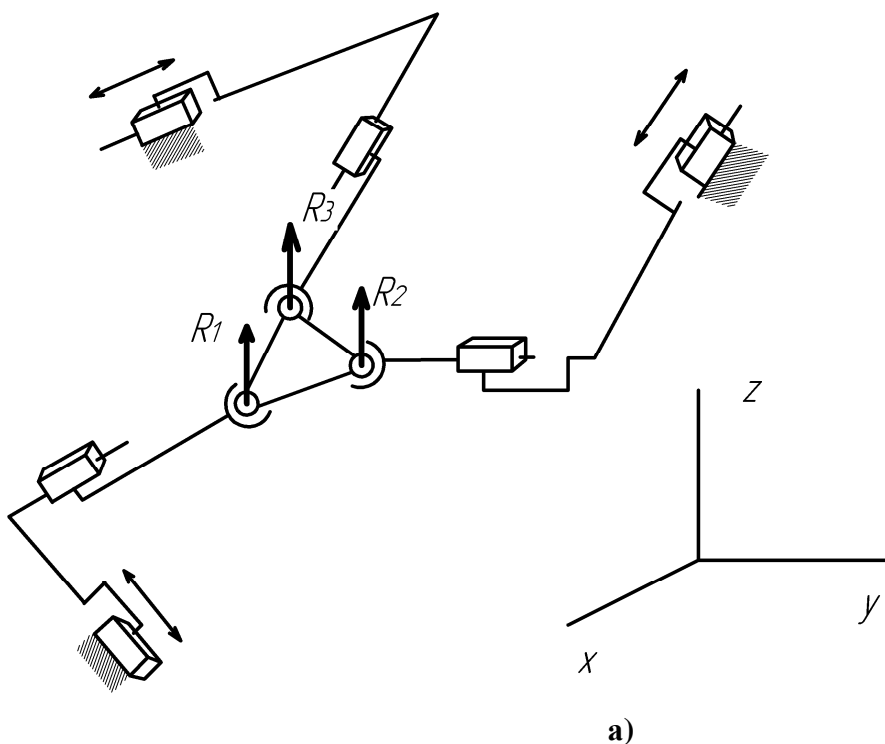
$$W = 6 \cdot (n - 1) - 5 \cdot p_5 - 4 \cdot p_4 - 3 \cdot p_3 - 2 \cdot p_2 - p_1 \quad (2.2)$$

где p_i – число кинематических пар i -го класса с $(6-i)$ степенями подвижности ($i=1, \dots, 5$).

Число степеней свободы равно:

$$W = 6 \cdot (8 - 1) - 5 \cdot 9 = -3.$$

Однако, рассматриваемый механизм обладает тремя степенями свободы. Для устранения избыточных связей заменим вращательные пары, соединенные с выходным звеном сферическими (рис.2.7). В этом случае каждая цепь налагает по одной связи. Реакция связи направлена вдоль оси сферической пары, параллельной оси z . Такие три кинематические цепи налагают три связи – три силы, параллельные оси z . Эти три силы создают моменты вокруг осей x , y . Таким образом, реакциями связей являются два момента и сила.



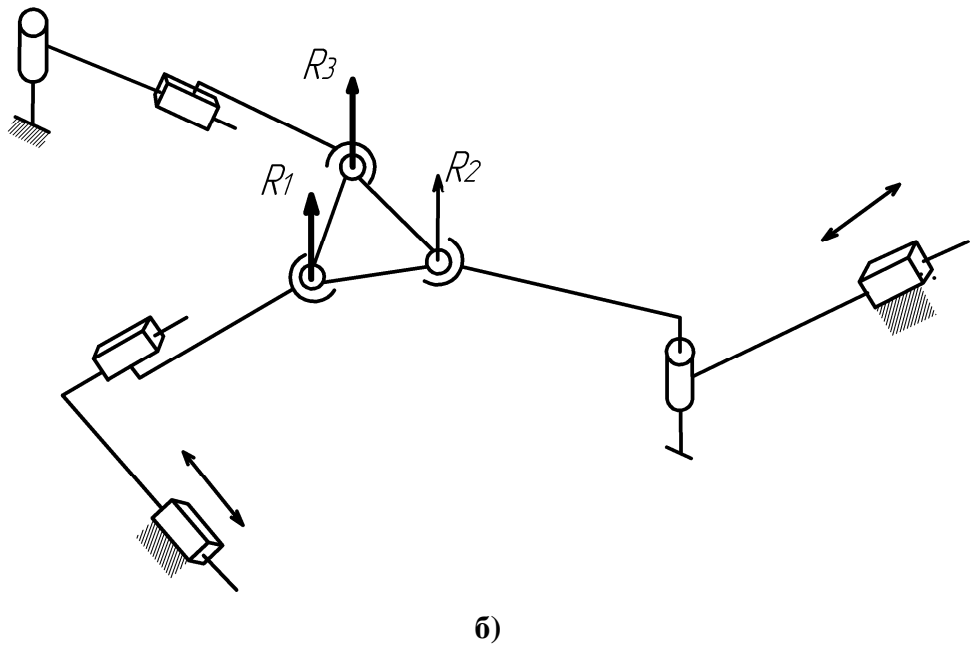


Рис. 2.7. Схемы механизма, в которых кинематические цепи содержат сферические пары
а – 3PS, PPS, PPS,
б – RPS, PPS, PRS

Если воспользоваться формулой Сомова-Малышева (2.2.), то число степеней свободы будет равно:

$$W = 6 \cdot (8 - 1) - 5 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 3$$

Элементы параметрического синтеза определяются углами между осями кинематических пар. Если оси поступательных пар параллельны, то такое расположение осей дает внутреннюю подвижность и внутренняя степень свободы не связана с выходным звеном (рис.2.8).

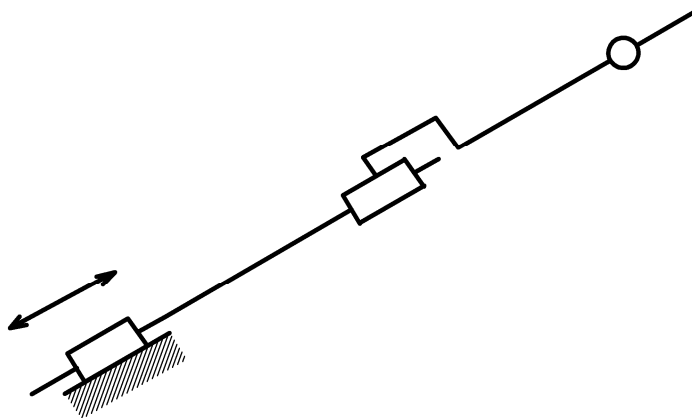


Рис. 2.8. Схема кинематической цепи с параллельным расположением осей двух поступательных пар.

Таким образом, показана методика синтеза и анализа плоского механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы на основе связей налагаемых кинематическими цепями.

Связи, налагаемые кинематическими цепями могут быть повторяющимися (одинаковые в каждой), либо неповторяющимися, при этом характер движения не меняется.

2.2. Решение задачи о положениях

В параграфе рассматривается решение задачи о положении плоского механизма с тремя степенями свободы (рис. 2.9) [129, 131]. Задача о положении является главной задачей [48, 77, 79].

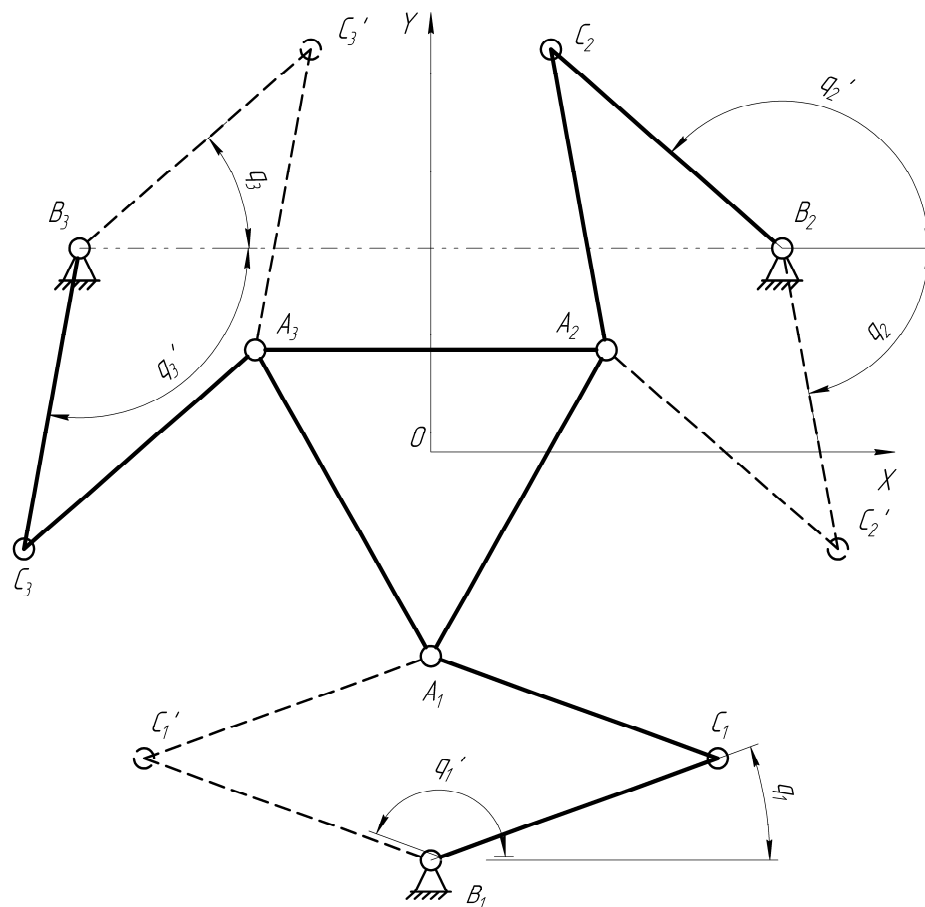


Рис. 2.9. Схема рассматриваемого плоского механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы

Задача о положениях определяет координаты входных звеньев механизма (координаты точек A_3, B_3, C_3), описываемых углами q_1, q_2, q_3 и положение центра платформы $A_0 (x, y)$ и угла поворота платформы φ вокруг этого центра. Выходное звено может перемещаться только в горизонтальной плоскости xoy .

Зададим значения радиусов $R_1=1, R_2=2$, окружностей описанных соответственно вокруг треугольников $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$, а также значения длин звеньев $l_1=B_1C_1=B_2C_2=B_3C_3=1,5$ и $l_2=A_1C_1=A_2C_2=A_3C_3=1,5$.

Определим координаты точек $C_1C_2C_3$. Координаты точек $A_1(x_{A1}, y_{A1}), B_1(x_{B1}, y_{B1})$ в неподвижной системе координат равны:

$$x_{A1} = x + R_1 \cdot \sin \varphi = 0;$$

$$y_{A1} = y - R_1 \cdot \cos \varphi = -1;$$

$$x_{B1} = 0; y_{B1} = -2.$$

Составим следующие уравнения для первого звена:

$$l_1^2 = (x_{C1} - x_{A1})^2 + (y_{C1} - y_{A1})^2; \quad (2.3)$$

$$l_2^2 = (x_{B1} - x_{C1})^2 + (y_{B1} - y_{C1})^2. \quad (2.4)$$

Для решения системы уравнений введем коэффициенты:

$$S_1 = x_{A1}^2 - x_{B1}^2 + y_{A1}^2 - y_{B1}^2 = -3;$$

$$S_2 = x_{B1} - x_{A1} = 0;$$

$$S_3 = y_{B1} - y_{A1} = -1.$$

Решая уравнения (2.3), (2.4), получим $y_{C1} = -1,5$, а затем определяем значения $x_{C1}^1 = 1,413$ и $x_{C1}^2 = -1,413$. Таким образом, определены координаты точек $C_1^1(1,413; -1,5)$ и $C_1^2(-1,413; -1,5)$.

Для второй цепи аналогичным образом составляются системы уравнений:

$$l_1^2 = (x_{C2} - x_{A2})^2 + (y_{C2} - y_{A2})^2; \quad (2.5)$$

$$l_2^2 = (x_{B2} - x_{C2})^2 + (y_{B2} - y_{C2})^2, \quad (2.6)$$

где координаты точки $A_2(x_{A2}, y_{A2}), B_2(x_{B2}, y_{B2})$

$$x_{A2} = x - R_1 \cdot \frac{\sin \varphi}{2} - R_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \varphi = -0,866;$$

$$y_{A_2} = x + R_1 \cdot \frac{\cos \varphi}{2} - R_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \varphi = 0,5;$$

$$x_{B_2} = 1,732, \quad y_{B_2} = 1,$$

и для третьей цепи:

$$l_1^2 = (x_{C_3} - x_{A_3})^2 + (y_{C_3} - y_{A_3})^2; \quad (2.7)$$

$$l_2^2 = (x_{B_3} - x_{C_3})^2 + (y_{B_3} - y_{C_3})^2, \quad (2.8)$$

где координаты точки $A_3(x_{A_3}, y_{A_3}), B_3(x_{B_3}, y_{B_3})$:

$$x_{A_3} = x - R_1 \cdot \frac{\sin \varphi}{2} - R_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \varphi = -0,866;$$

$$y_{A_3} = x + R_1 \cdot \frac{\cos \varphi}{2} - R_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \varphi = 0,5,$$

$$x_{B_3} = -1,732, \quad y_{B_3} = 1.$$

Далее решая уравнения (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) определяются координаты точек $C_2^1; C_2^2; C_3^1; C_3^2$, равные в нашем случае: $C_2^1(0,592; 1,975)$, $C_2^2(2,006; -0,474)$, $C_3^1(-2,006; -0,474)$, $C_3^2(-0,592; 1,975)$.

Координаты шарниров можно найти, используя следующий подход. Взаимное положение двух систем координат – подвижной $x_p y_p z_p$ и неподвижной $x_{uz} y_{uz} z_{uz}$ описывается матрицей $\mathbf{A}(\mathbf{n})$, равной произведению двух матриц: $\mathbf{A}(\mathbf{x}y)$ – матрицы линейных перемещений и $\mathbf{A}(\varphi)$ матрицы поворота вокруг оси oz :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & xn \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & yn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для определения координат точек A_0, A_1, A_2, A_3 в неподвижной системе координат $x_{uz} y_{uz} z_{uz}$ необходимо умножить матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{n})$ на координаты точек в подвиж-

ной системе координат: $\mathbf{Ab}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{A}_0$; $\mathbf{Ab}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{A}_1$; $\mathbf{Ab}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{A}_2$; $\mathbf{Ab}_3 = \mathbf{A}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{A}_3$. Таким образом, получаем:

$$\mathbf{Ab}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Ab}_2 = \begin{pmatrix} x - \frac{\sin \varphi}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \cos \varphi}{2} \\ y + \frac{\cos \varphi}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Ab}_1 = \begin{pmatrix} x + \sin \varphi \\ y + \cos \varphi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Ab}_3 = \begin{pmatrix} x - \frac{\sin \varphi}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \cos \varphi}{2} \\ y + \frac{\cos \varphi}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Условие связей в общем виде представлено уравнением:

$$l^2 = (x_{Ai} - x_{Ci})^2 + (y_{Ai} - y_{Ci})^2,$$

где $x_{Ci} = x_{Bi} + l_1 \cdot \cos q_i$; $y_{Ci} = y_{Bi} + l_1 \cdot \sin q_i$.

Для упрощения решения квадратного уравнения произведем замену некоторых выражений:

$$K_i = x_{Ai}^2 + y_{Ai}^2 + x_{Bi}^2 + y_{Bi}^2 + l_1^2 - 2 \cdot x_{Ai} \cdot x_{Bi} - 2 \cdot y_{Ai} \cdot y_{Bi} - l_2^2;$$

$$N_i = 2 \cdot l_1 \cdot (x_{Bi} - x_{Ai});$$

$$P_i = 2 \cdot l_1 \cdot (y_{Bi} - y_{Ai}).$$

В итоге получаем уравнение:

$$\cos q_i = \frac{-2 \cdot K_i \cdot N_i \pm \sqrt{(2 \cdot K_i \cdot N_i)^2 - 4 \cdot (N_i^2 + P_i^2) \cdot (K_i^2 - P_i^2)}}{2 \cdot (N_i^2 + P_i^2)}.$$

Отсюда находим значения q_1, q_2, q_3 при конкретных заданных значениях координат положения центра платформы $A_1A_2A_3$ ($x; y$), угла поворота φ платформы вокруг этого центра и длин звеньев B_iC_i и C_iA_i .

Неявная функция между обобщенными и абсолютными координатами будет иметь вид: $F(x, y, \varphi, q_i) = 0$. В общем виде неявную функцию можно записать в виде:

$$F_i = (x_{Ai} - x_{Bi} - l_i \cdot \cos q_i)^2 + (y_{Ai} - y_{Bi} - l_i \cdot \sin q_i)^2.$$

Для манипулятора с тремя кинематическими цепями имеем:

$$F_1 = (x_{A1} - x_{B1} - l_1 \cdot \cos q_1)^2 + (y_{A1} - y_{B1} - l_1 \cdot \sin q_1)^2 = 0$$

$$F_2 = (x_{A2} - x_{B2} - l_2 \cdot \cos q_2)^2 + (y_{A2} - y_{B2} - l_2 \cdot \sin q_2)^2 = 0 \quad (2.9)$$

$$F_3 = (x_{A3} - x_{B3} - l_3 \cdot \cos q_3)^2 + (y_{A3} - y_{B3} - l_3 \cdot \sin q_3)^2 = 0$$

Таким образом, составлены уравнения связей плоского механизма.

2.3. Решение задачи о скоростях

В параграфе дается решение задач о скоростях и особых положениях двумя методами: аппаратом винтового исчисления и дифференцированием уравнений связи.

2.3.1. Решение задачи о скоростях

методом винтового исчисления

Угловая скорость выходного звена равна сумме угловых скоростей шарниров звеньев одной цепи [31]:

$$\omega = \omega_{11} + \omega_{12} + \omega_{12}, \quad (2.10)$$

а линейная скорость выходного звена равна сумме скоростей шарниров звеньев одной цепи:

$$V_x = V_{11x} + V_{12x} + V_{13x}; \quad (2.11)$$

$$V_y = V_{11y} + V_{12y} + V_{13y}, \quad (2.12)$$

$$\text{где } V = \rho \times \omega = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \rho_x & \rho_y & \rho_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} = i(\rho_y \omega_z - \rho_z \omega_y) - j(\rho_x \omega_z - \rho_z \omega_x) + k(\rho_x \omega_y - \rho_y \omega_x)$$

Рассмотрим первое звено с положением второго шарнира в точке $C_1^1(1,413;-1,5)$. Зная координаты радиус-векторов: $\rho_{1y} = -2$, $\rho_{1x} = 0$, $\rho_{2y} = -1,5$, $\rho_{2x} = 1,413$, $\rho_{3y} = -1$ и $\rho_{3x} = 0$, можно определить скорости :

$$V_{11x} = \rho_{11y} \omega_{11}; \quad V_{11y} = -\rho_{11x} \omega_{11}; \quad V_{11z} = 0;$$

$$V_{12x} = \rho_{12y} \omega_{12}; \quad V_{12y} = -\rho_{12x} \omega_{12}; \quad V_{12z} = 0;$$

$$V_{13x} = \rho_{13y} \omega_{13}; \quad V_{13y} = -\rho_{13x} \omega_{13}; \quad V_{13z} = 0.$$

при $\rho_z = 0$, $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$.

Решив систему уравнений (2.10), (2.11), (2.12) получаем:

$$\omega = \omega_{11} + \omega_{12} + \omega_{13};$$

$$V_x = \rho_{11y} \omega_{11} + \rho_{12y} \omega_{12} + \rho_{13y} \omega_{13}; \quad (2.13)$$

$$V_y = -\rho_{11x} \omega_{11} - \rho_{12x} \omega_{12} - \rho_{13x} \omega_{13}.$$

Рассмотрим обратную задачу о скоростях. Задав значения скоростей выходного звена: $\omega=1$ рад/с, $V_x=1$ м/с, $V_y=1$ м/с, определим значения радиусов-векторов. Систему уравнений скоростей (2.13) можно записать в виде:

$$1 = \omega_{11} + \omega_{12} + \omega_{13};$$

$$1 = -2 \cdot \omega_{11} - 1,5 \cdot \omega_{12} - 1 \cdot \omega_{13};$$

$$1 = 0 \cdot \omega_{11} - 1,413 \cdot \omega_{12} - 0 \cdot \omega_{13}$$

Для расчета скоростей ω_{11} , ω_{12} , ω_{13} применим правило Крамера. Составим матри-

цу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1,5 & -1 \\ 0 & -1,413 & 0 \end{pmatrix}$, определитель которой $|\mathbf{A}| = 1,413$. Заменяя первый

столбец матрицы \mathbf{A} свободными членами $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, имеем новую матрицу

$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1,5 & -1 \\ 1 & -1,413 & 0 \end{pmatrix}$, определитель которой $\det(\mathbf{A}_1) = -2,236$.

Меняя второй и третий столбцы на столбец свободных членов $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, получаем

соответственно матрицы A_2 и A_3 , для которых $\det(A_2)=-1$ и $\det(A_3)=4,739$

Тогда угловые скорости всех шарниров первой цепи (с координатами точки $C_1^1(1,413;-1,5)$) можно рассчитать как

$$\omega_{11} = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = -1,646 \text{ рад/с}; \quad \omega_{12} = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = -0,708 \text{ рад/с}; \quad \omega_{13} = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 3,354$$

рад/с.

Рассмотрим положение первого звена при положении второго шарнира в точке $C_1^2(-1,413;-1,5)$. Значения радиус-векторов составляют:

$$\rho_{1y} = -2; \quad \rho_{1x} = 0; \quad \rho_{2y} = -1,5; \quad \rho_{2x} = -1,413; \quad \rho_{3y} = -1; \quad \rho_{3x} = 0.$$

Решив уравнения (2.7), (2.8), (2.9) с учётом новых значений радиус-векторов, получаем матрицу, состоящую из значений радиусов-векторов

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1,5 & -1 \\ 0 & 1,413 & 0 \end{pmatrix}, \text{ определитель которой } \det(A') = -1,413.$$

Заменив первый столбец матрицы A' свободными членами $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, имеем но-

$$\text{вую матрицу } A_1' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1,5 & -1 \\ 1 & 1,413 & 0 \end{pmatrix}, \text{ определитель которой } \det(A_1') = 3,326.$$

Меняя второй и третий столбцы на столбец свободных членов, получаем соответственно матрицы A_2' и A_3' , для которых определители равны $\det(A_2')=-1$ и $\det(A_3')=-3,739$.

Тогда угловые скорости всех шарниров первой цепи (с координатами точки C_1^2) будут равны:

$$\omega_{11}' = -2,354 \text{ рад/с}; \quad \omega_{12}' = 0,708 \text{ рад/с}; \quad \omega_{13}' = 2,646 \text{ рад/с}.$$

Аналогичным образом определяются и угловые скорости шарниров:

второй цепи с координатами точки $C_2^1(0,592;1,975)$:

$$\omega_{21}=0,882 \text{ рад/с}; \quad \omega_{22}=-0,966 \text{ рад/с}; \quad \omega_{32}=2,848 \text{ рад/с};$$

второй цепи, с координатами $C_2^2(2,006;-0,474)$:

$$\omega'_{21} = -1,849 \text{ рад/с}; \quad \omega'_{22} = 0,966 \text{ рад/с}; \quad \omega'_{32} = 1,884 \text{ рад/с};$$

третьей цепи с координатами точки $C_3^1(-2,006;-0,474)$:

$$\omega_{31}=0,237 \text{ рад/с}; \quad \omega_{32}=-0,259 \text{ рад/с}; \quad \omega_{33}=-0,505 \text{ рад/с};$$

третьей цепи с координатами точки $C_3^2(-0,592;1,975)$:

$$\omega'_{31} = 0,496 \text{ рад/с}; \quad \omega'_{32} = -0,259 \text{ рад/с}; \quad \omega'_{33} = 0,764 \text{ рад/с}.$$

Получено решение обратной задачи о скоростях с использованием винтового исчисления.

При решении прямой задачи о скоростях необходимо определить силовые и кинематические винты [31]. Под силовым винтом понимается винт, к которому приводится система сил, действующая на тело, причем вектором винта является равнодействующая сила, а моментом – момент всех сил относительно некоторой точки приведения. Кинематический винт характеризует общий вид бесконечно малого движения твердого тела. Винт можно определить шестью плюккеровыми координатами, причем три из них – проекции вектора на координатные оси, а три другие – проекции момента винта относительно начала координат на координатные оси.

Относительный момент tom – сумма скалярных произведений вектора первого винта на момент второго относительно некоторой точки и вектора второго винта на момент первого относительно той же точки.

Обозначим через f силу, действующую на выходное звено. Тогда

$$tom(f, \Omega) = tom(f, \Omega_{11}), \quad (2.14)$$

где Ω - кинематический винт выходного звена с координатами $V_x, V_y, V_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$;

Ω_{11} – кинематический винт входного звена с координатами

$$V_{11x}, V_{11y}, V_{11z}, \omega_{11x}, \omega_{11y}, \omega_{11z};$$

$V_x, V_y, V_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ – скорости выходного звена;

$V_{11x}, V_{11y}, V_{11z}, \omega_{11x}, \omega_{11y}, \omega_{11z}$ – скорости входного звена.

Тогда можно записать уравнения относительных моментов в виде:

$$mom(f, \Omega) = f_x V_x + f_y V_y + f_z V_z + m_x \omega_x + m_y \omega_y + m_z \omega_z$$

$$mom(f, \Omega_{11}) = f_x V_{11x} + f_y V_{11y} + f_z V_{11z} + m_x \omega_{11x} + m_y \omega_{11y} + m_z \omega_{11z}$$

Решив уравнение (2.14), получаем:

$$V_{11x} = \rho_{1y} \omega_{11}, \quad V_{11y} = -\rho_{1x} \omega_{11}, \quad V_{11z} = 0,$$

$$\omega_{11x} = 0, \quad \omega_{11y} = 0, \quad \omega_{11z} = \omega_{11}.$$

Тогда уравнения относительных моментов приобретают вид:

$$mom(f, \Omega) = f_x V_x + f_y V_y + m_z \omega_z,$$

$$mom(f, \Omega_{11}) = f_x V_{11x} + f_y V_{11y} + m_z \omega_{11z}.$$

Составим систему уравнений для трех звеньев:

$$e_{1x} V_x + e_{1y} V_y + e_{1z}^0 \omega_z = e_{1x} V_{11x} + e_{1y} V_{11y} + e_{1z}^0 \omega_{11z};$$

$$e_{2x} V_x + e_{2y} V_y + e_{2z}^0 \omega_z = e_{2x} V_{21x} + e_{2y} V_{21y} + e_{2z}^0 \omega_{21z}; \quad (2.15)$$

$$e_{3x} V_x + e_{3y} V_y + e_{3z}^0 \omega_z = e_{3x} V_{31x} + e_{3y} V_{31y} + e_{3z}^0 \omega_{31z}$$

где $e_{1x}, e_{1y}, e_{2x}, e_{2y}, e_{3x}, e_{3z}$ – плюккеровы координаты единичных векторов, которые рассчитываются следующим образом:

$$e_{1x} = \frac{x_{C1} - x_{A1}}{l_1}, \quad e_{1y} = \frac{y_{C1} - y_{A1}}{l_1},$$

$$e_{2x} = \frac{x_{C2} - x_{A2}}{l_1}, \quad e_{2y} = \frac{y_{C2} - y_{A2}}{l_1},$$

$$e_{3x} = \frac{x_{C3} - x_{A3}}{l_1}, \quad e_{3y} = \frac{y_{C3} - y_{A3}}{l_1}.$$

С учётом $\sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2} = 1$ моментная часть плюккеровых координат вычисляется

по следующим зависимостям:

$$\mathbf{e}_z^0 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \rho_x & \rho_y & \rho_z \\ \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = i(\rho_y \mathbf{e}_z - \rho_z \mathbf{e}_y) - j(\rho_x \mathbf{e}_z - \rho_z \mathbf{e}_x) + k(\rho_x \mathbf{e}_y - \rho_y \mathbf{e}_x),$$

$$e_{1z}^0 = k(\rho_{1x}e_{1y} - \rho_{1y}e_{1x}); \quad e_{2z}^0 = k(\rho_{2x}e_{2y} - \rho_{2y}e_{2x}); \quad e_{3z}^0 = k(\rho_{3x}e_{3y} - \rho_{3y}e_{3x}).$$

Для звеньев $A_1C_1^1B_1$; $A_2C_2^1B_2$; $A_3C_3^1B_3$ плюккеровы координаты составляют:

$$e_{1x} = 0,94; \quad e_{1y} = -0,333; \quad e_{1z}^0 = 0,94;$$

$$e_{2x} = -0,18; \quad e_{2y} = 0,98; \quad e_{2z}^0 = 0,94;$$

$$e_{3x} = -0,76; \quad e_{3y} = -0,649; \quad e_{3z}^0 = 0,94.$$

Значения радиусов векторов равны:

$$\rho_{1y} = -2; \quad \rho_{1x} = 0; \quad \rho_{2y} = 1; \quad \rho_{2x} = 1,732; \quad \rho_{3y} = 1; \quad \rho_{3x} = -1,732.$$

Задавая входные скорости равными $\omega_1=1$ рад/с, $V_x=1$ м/с, $V_y=1$ м/с, и подставив найденные плюккеровы координаты в (2.15), получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} e_{1x} + e_{1y} + e_{1z}^0 &= e_{1x}\rho_{1y}\omega_{11} + e_{1y}(-\rho_{11x}\omega_{11}) + e_{1z}^0\omega_{11}; \\ e_{2x} + e_{2y} + e_{2z}^0 &= e_{2x}\rho_{2y}\omega_{21} + e_{2y}(-\rho_{2x}\omega_{21}) + e_{2z}^0\omega_{21}; \\ e_{3x} + e_{3y} + e_{3z}^0 &= e_{3x}\rho_{3y}\omega_{31} + e_{3y}(-\rho_{3x}\omega_{31}) + e_{3z}^0\omega_{31}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Составив соответствующую матрицу и используя правило Крамера, получаем скорости входного звена:

$$\omega_1=-1,646 \text{ рад/с}; \quad \omega_2=-1,846 \text{ рад/с}; \quad \omega_3=0,496 \text{ рад/с}.$$

Для звеньев $A_1C_1^2B_1$; $A_2C_2^2B_2$; $A_3C_3^2B_3$ плюккеровы координаты составляют:

$$e_{1x} = 0,94; \quad e_{1y} = -0,333; \quad e_{1z}^0 = 0,94;$$

$$e_{2x} = 0,76; \quad e_{2y} = -0,649; \quad e_{2z}^0 = -0,94;$$

$$e_{3x} = 0,183; \quad e_{3y} = 0,983; \quad e_{3z}^0 = -0,94.$$

Задавая выходные скорости, равными $\omega_1=1$ рад/с, $V_x=1$ м/с, $V_y=1$ м/с, и подставив найденные плюккеровы координаты в выражения (2.654), составляем соответствующую матрицу и, используя правило Крамера, получаем скорости входного звена:

$$\omega_1=-2,354 \text{ рад/с}; \quad \omega_2=-0,883 \text{ рад/с}; \quad \omega_3=0,237 \text{ рад/с}.$$

Теперь решим прямую задачу. т.е. определим скорости выходного звена при известных обобщенных скоростях.

Задав обобщенные скорости $\omega_1=1$ рад/с, $\omega_2=1$ рад/с, $\omega_3=1$ рад/с и подставив их в уравнения (2.15), составляем систему уравнений для положения механизма с координатами $A_1C_1B_1$; $A_2C_2B_2$; $A_3C_3B_3$:

$$\begin{aligned} 0,94 \cdot V_x - 0,33 \cdot V_y + 0,94 \cdot \omega_z &= -0,94; \\ -0,18 \cdot V_x + 0,98 \cdot V_y + 0,94 \cdot \omega_z &= -0,94; \\ -0,76 \cdot V_x - 0,649 \cdot V_y + 0,94 \cdot \omega_z &= -0,94. \end{aligned}$$

Решив систему уравнений, составляем соответствующую матрицу и, используя правило Крамера, получаем:

$$\omega = -1 \text{ рад/с}; \quad V_x = 0 \text{ м/с}; \quad V_y = 0 \text{ м/с}.$$

Таким образом, решены прямая и обратная задача о скоростях с использованием аппарата винтового исчисления.

2.3.2. Решение задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связей

Найдем скорость, используя метод, предложенный Анджелесом и Госсленом и основанный на дифференцировании уравнений связей (2.9) [109, 130, 178].

Для решения задачи о скоростях будем использовать аналитический подход, основанный на изучении свойств матрицы Якоби, представленных в общем виде:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = (-\mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (2.17)$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь: \mathbf{A} – матрица частных производных от неявной функции по x , y , φ ;

\mathbf{B} – матрица частных производных от неявной функции по обобщенным координатам q_i ;

\mathbf{V} – абсолютные скорости центра выходного звена;

$\boldsymbol{\omega}$ – обобщенные скорости во вращательных шарнирах B_1 , B_2 и B_3 .

Нужно найти частные производные от неявной функции между обобщенными и абсолютными координатами и составить две матрицы.

Для этого запишем матрицы Якоби (2.17) в виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Тогда частные производные от неявной функции по обобщенным и абсолютным координатам составят:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x - 2x_{B1} + 2 \cdot \sin \varphi - 2 \cdot l_1 \cdot \cos q_1;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y - 2y_{B1} + 2 \cdot \cos \varphi - 2 \cdot l_1 \cdot \sin q_1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varphi} = 2 \cdot \cos \varphi \cdot (x - x_{B1} + \sin \varphi - l_1 \cdot \cos q_1) - 2 \cdot \sin \varphi \cdot (y_{B1} - y + \cos \varphi + l_1 \cdot \sin \varphi);$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x - 2x_{B2} - 2 \cdot l_1 \cdot \cos q_2 + \sqrt{3} \cdot \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = 2y - 2y_{B2} + \cos \varphi - 2 \cdot l_1 \cdot \sin q_2 + \sqrt{3} \cdot \cos \varphi;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} = & 2 \cdot \left(\frac{\cos \varphi}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{2} \right) \cdot \left(x_{B2} - x + \frac{\sin \varphi}{2} + l_1 \cdot \cos q_2 - \frac{\sqrt{3} \cdot \cos \varphi}{2} \right) - \\ & - 2 \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \cos \varphi}{2} \right) \cdot \left(y - y_{B2} + \frac{\cos \varphi}{2} - l_1 \cdot \sin \theta_2 + \frac{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{2} \right); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = 2x - 2x_{B3} - \sin \varphi - 2 \cdot l_1 \cdot \cos q_3 - \sqrt{3} \cdot \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = 2y - 2y_{B3} + \cos \varphi - 2 \cdot l_1 \cdot \sin q_3 - \sqrt{3} \cdot \cos \varphi;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} &= 2 \cdot \left(\frac{\cos \varphi}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{2} \right) \cdot \left(x_{B3} - x + \frac{\sin \varphi}{2} + l_1 \cdot \cos q_3 - \frac{\sqrt{3} \cdot \cos \varphi}{2} \right) + \\ &+ 2 \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \cos \varphi}{2} \right) \cdot \left(y - y_{B3} + \frac{\cos \varphi}{2} - l_1 \cdot \sin q_3 + \frac{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{2} \right); \\ \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} &= 2 \cdot l_1 \cdot \sin q_1 \cdot (x - x_{B1} + \sin \varphi - l_1 \cdot \cos q_1) + \\ &+ l_1 \cdot \cos q_1 \cdot (y_{B1} - y + \cos \varphi + l_1 \cdot \sin q_1); \\ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} &= -2 \cdot l_1 \cdot \sin q_2 \cdot \left(x_{B2} - x + \frac{\sin \varphi}{2} + l_1 \cdot \cos q_2 - \frac{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{2} \right) - \\ &- 2 \cdot l_1 \cdot \cos q_2 \cdot \left(y - y_{B2} + \frac{\cos \varphi}{2} - l_1 \cdot \sin q_2 + \frac{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{2} \right); \\ \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} &= -2 \cdot l_1 \cdot \cos q_3 \cdot \left(y_{B2} - y - \frac{\cos \varphi}{2} + l_1 \cdot \cos q_2 + \frac{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi}{2} \right) - \\ &- 2 \cdot l_1 \cdot \cos q_3 \cdot \left(x_{B3} - x + \frac{\sin \varphi}{2} + l_1 \cdot \cos q_3 + \frac{\sqrt{3} \cdot \cos \varphi}{2} \right). \end{aligned}$$

Приведем пример решения данной задачи при известных параметрах:

$$l_1 = l_2 = 1,5; \quad x=0; \quad y=0; \quad \varphi=0.$$

Подставив исходные данные, получим значения обобщенных координат θ , при расположении центра подвижной платформы в начале координат:

$$q_1 = 0,34 \text{ рад} = 19,5^0; \quad q_2 = 2,43 \text{ рад} = 139,3^0; \quad q_3 = -1,75 \text{ рад} = -100,6^0;$$

С учётом найденных значений имеем матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2,828 & 1 & -2,828 \\ 0,548 & -2,95 & -2,829 \\ 2,282 & 1,949 & -2,829 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2,828 & 0 & 0 \\ 0 & -2,829 & 0 \\ 0 & 0 & -2,829 \end{pmatrix}.$$

Подставив в уравнение (2.17) значения матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} , получаем выражение:

$$\begin{pmatrix} -2,828 & 1 & -2,828 \\ 0,548 & -2,95 & -2,829 \\ 2,282 & 1,949 & -2,829 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,828 & 0 & 0 \\ 0 & -2,829 & 0 \\ 0 & 0 & -2,829 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Приняв, что компоненты скорости выходного звена в абсолютной системе

координат равны $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, имеем:

$$\begin{pmatrix} -4,656 \\ -5,231 \\ 1,402 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,828 & 0 & 0 \\ 0 & -2,829 & 0 \\ 0 & 0 & -2,829 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}.$$

Откуда значения скоростей:

$$\dot{q}_1 = 1,646 \text{ рад/с}; \quad \dot{q}_2 = 1,849 \text{ рад/с}; \quad \dot{q}_3 = -0,496 \text{ рад/с}.$$

Для решения обратной задачи примем:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (2.18) примет вид:

$$\begin{pmatrix} -2,828 & 1 & -2,828 \\ 0,548 & -2,95 & -2,829 \\ 2,282 & 1,949 & -2,829 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,828 \\ -2,829 \\ -2,829 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Решив (2.20) получаем $\dot{x} = 0$ м/с, $\dot{y} = 0$ м/с, $\dot{\phi} = -1$ рад/с.

Таким образом, дифференцированием уравнений связей решены прямая и обратная задача о скоростях. Полученные значения скоростей совпадают с решениями, полученными аппаратом винтового исчисления.

2.4. Решение задачи по определению особых положений механизма

У механизмов параллельной структуры могут проявляться особые положения в рабочей зоне обслуживания, то есть положения, в которых либо теряется степень свободы, либо механизм становится неуправляемым. В связи с этим воз-

никает задача по определению указанных положений и поиску возможностей вывода данного механизма из особого положения. Полученные матрицы можно использовать для определения особых положений.

При особом положении манипулятора определитель матрицы, составленной из относительных моментов единичных силовых винтов, передаваемых со всех кинематических цепей, равен нулю. Для определения этого положения манипулятора будем поворачивать выходное звено против часовой стрелки вокруг оси z . Используя уравнение связей, определим координаты точек, соответствующих особому положению, в котором звенья A_1C_1 , A_2C_2 , A_3C_3 пересекутся в одной точке (рис.2.10). В рассматриваемом случае – это точка начала координат. В этом случае координаты точек звеньев равны:

$$A_1^1(0,6;-0,8), A_2^1(0,393;0,920), A_3^1(-0,993;-0,120);$$

$$C_1^2(1,5;-2,0), C_2^1(0,982;2,299), C_3^1(-2,482;-0,299).$$

Особое положение соответствует повороту на угол $\varphi = 36,8697^\circ$.

Подставив значения плюккеревых координат в уравнение (2.15) имеем:

$$0,6 \cdot V_x - 0,83 \cdot V_y + 0 \cdot \omega_z = 0,6 \cdot (-2) \cdot \omega_{11} - 0,8 \cdot 0 \cdot \omega_{11} + 0 \cdot \omega_{11z} = -1,2 \cdot \omega_{11};$$

$$0,393 \cdot V_x + 0,92 \cdot V_y + 0 \cdot \omega_z = 0,393 \cdot 1 \cdot \omega_{21} + 0,92 \cdot 1,732 \cdot \omega_{21} + 0 \cdot \omega_{21z} = 1,2 \cdot \omega_{21};$$

$$-0,993 \cdot V_x - 0,12 \cdot V_y + 0 \cdot \omega_z = -0,993 \cdot \omega_{31} - 0,12 \cdot 1,732 \cdot \omega_{31} + 0 \cdot \omega_{31z} = -1,2 \cdot \omega_{31}.$$

Отсюда получаем:

$$0,6 \cdot V_x - 0,83 \cdot V_y + 0 \cdot \omega_z = -1,2 \cdot \omega_{11},$$

$$0,393 \cdot V_x + 0,92 \cdot V_y + 0 \cdot \omega_z = 1,2 \cdot \omega_{21},$$

$$-0,993 \cdot V_x - 0,12 \cdot V_y + 0 \cdot \omega_z = -1,2 \cdot \omega_{31}.$$

Определитель матрицы, составленной из плюккеревых координат, стоящих при скоростях, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0,393 & 0,92 & 0 \\ -0,993 & -0,12 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

В этом случае обобщенные скорости могут быть равны нулю $\omega_{11}=0$ рад/с, $\omega_{21}=0$ рад/с, $\omega_{31}=0$ рад/с (т.е. привод заторможен), а выходное звено имеет движение.

Составим систему уравнений согласно уравнению (2.15):

$$\begin{aligned} 0,6 \cdot V_x - 0,83 \cdot V_y + 0 \cdot \omega_z &= 0; \\ 0,393 \cdot V_x + 0,92 \cdot V_y + 0 \cdot \omega_z &= 0; \\ -0,993 \cdot V_x - 0,12 \cdot V_y + 0 \cdot \omega_z &= 0. \end{aligned}$$

Скорости $V_x=0$ м/с, $V_y=0$ м/с, а ω_z - любая величина.

Т.е. с точностью до множителя определен кинематический винт, который имеет мгновенное вращение вокруг оси z.

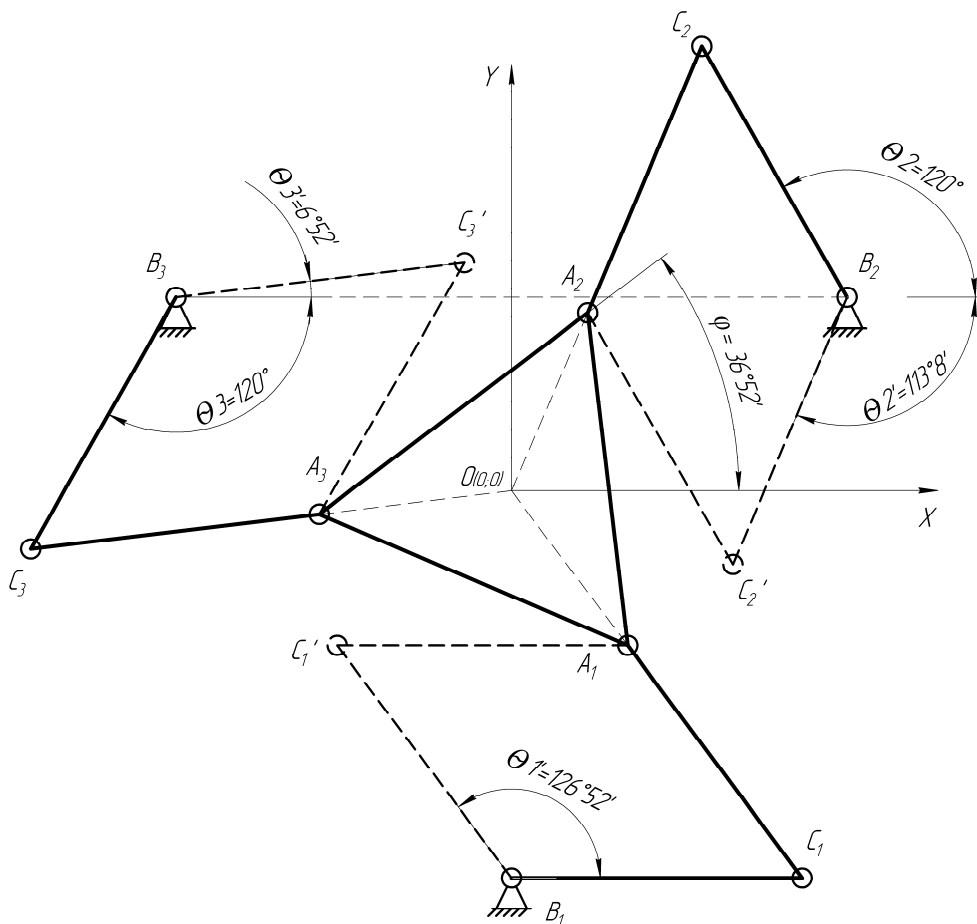


Рис. 2.10. Особое положение механизма при пересечении звеньев всех цепей в точке O

Далее рассмотрим случай особого положения, при котором одна цепь выстраивается вдоль одной линии (рис.2.11). Координаты точек $A_1(0;1)$; $B_1(0;-2)$;

$C_1(0;-0,5)$. Значения радиус-векторов составляют $\rho_{1y} = -2$, $\rho_{1x} = 0$, $\rho_{2y} = -0,5$, $\rho_{2x} = 0$, $\rho_{3y} = 1$, $\rho_{3x} = 0$. В этом случае система уравнений (2.10), (2.11), 2.12) примет вид:

$$\omega = \omega_{11} + \omega_{12} + \omega_{13};$$

$$V_x = \rho_{11y} \cdot \omega_{11} + \rho_{12y} \cdot \omega_{12} + \rho_{13y} \cdot \omega_{13} = -2 \cdot \omega_{11} - 0,5 \cdot \omega_{12} + 1 \cdot \omega_{13};$$

$$V_y = -\rho_{11x} \cdot \omega_{11} - \rho_{12x} \cdot \omega_{12} - \rho_{13x} \cdot \omega_{13} = 0 \cdot \omega_{11} - 0 \cdot \omega_{12} - 0 \cdot \omega_{13}.$$

Найдем определитель матрицы, составленной из плюккеровых координат, стоящих при значениях скоростей равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -0,5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, определены особые положения с использованием аппарата винтового исчисления.

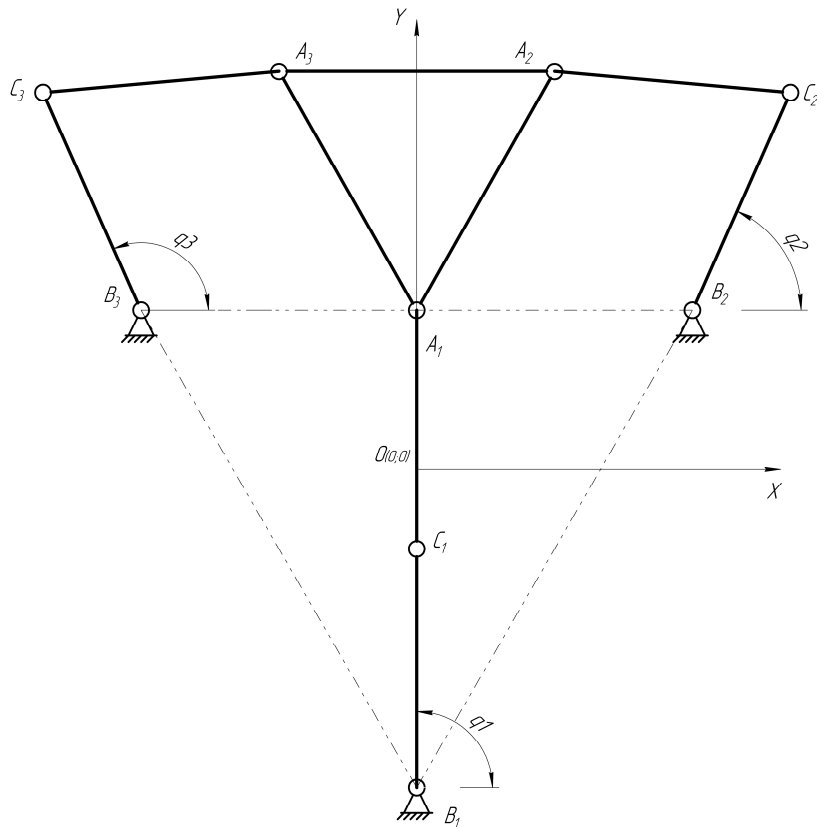


Рис. 2.11. Особое положение манипулятора, при котором звенья одной цепи выстраиваются в одну линию и линии всех звеньев пересекают точку B_1

Решим эту же задачу на базе метода, предложенного Анджелесом и Госсленом [82] и основанного на изучении свойств матриц, составленных из дифференциальных уравнений. Эти выражения получены из уравнений связей.

В нашем случае имеем две матрицы Якоби:

- матрицу частных производных от неявной функции F по x_n, u_n, φ (матрица \mathbf{A}) для перемещения выходного звена;

- матрицу частных производных от неявной функции по обобщенным координатам q_i (матрица \mathbf{B}) – перемещение входного звена.

Манипуляционный механизм находится в особом положении, если определитель одной из матриц Якоби равен нулю.

Полученные матрицы позволяют определить особые положения манипулятора. Если хотя бы одна из матриц Якоби вырождена (сингулярна), то манипулятор находится в особом положении.

Если определитель матрицы \mathbf{A} равен нулю, то это соответствует положению манипулятора, в котором звенья всех цепей пересекаются в одной точке (рис. 2.10), что соответствует неуправляемой подвижности. Если определитель матрицы \mathbf{B} равен нулю, то это соответствует положению манипулятора, в котором звенья одной цепи выстраиваются в одну линию (рис.3.3), при этом теряется одна степень свободы.

Рассмотрим *случай неуправляемой подвижности*. В этом случае центр вращения подвижной платформы (т. O) находится в нулевой точке неподвижной системы координат (рис. 2.10). Найдем особое положение при вращении платформы вокруг точки O и определим угол φ , при котором звенья C_1A_1, C_2A_2, C_3A_3 пересекаются в одной точке – начале координат. Такому особому положению соответствует поворот выходного звена-платформы на угол $\varphi = 36,87^\circ$, при этом углы $\dot{q}_1 = 0^\circ, \dot{q}_2 = 120^\circ, \dot{q}_3 = 240^\circ$.

Определители матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} будут равны:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1,8 & 2,4 & 0 \\ -1,179 & -2,76 & 0 \\ 2,977 & 0,36 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} -3,6 & 0 & 0 \\ 0 & -3,601 & 0 \\ 0 & 0 & -3,59 \end{vmatrix} = -46,656.$$

Рассмотрим случай, при котором происходит потеря одной степени свободы, т.е. определитель матрицы \mathbf{B} равен нулю (рис.2.11). При смещении центра платформы точки O из начала координат в точку $(0; 2; 0)$ и угле поворота $\varphi = 0$ определители матрицы \mathbf{B} и \mathbf{A} будут равны нулю:

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4,243 & 0 \\ 0 & 0 & 4,332 \end{vmatrix} = 0; \quad \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2,987 & 0,275 & 1,732 \\ 2,987 & 0,275 & -1,732 \end{vmatrix} = 0.$$

Обобщенные координаты составляют: $q_1=90^0$, $q_2=65,5^0$, $q_3=114,3^0$, что является особым положением, в котором присутствует потеря степени свободы и имеется неуправляемая подвижность.

Особые положения плоского механизма встречаются как в рабочей зоне (рис. 2.10), так и ее границе (рис.2.11).

Показано, что особые положения можно определить с применением аппарата винтового исчисления, так и исследованием свойств матриц Якоби. Приведенные примеры показали идентичность результатов.

2.5. Определение рабочей зоны механизма

Одной из основных характеристик манипуляторов является рабочая зона, т.е. пространство определяемое множеством точек, которых достигает выходное звено. Знание рабочего пространства определяет организацию гибкой производственной ячейки, в которую включен робот и эффективность производственной линии. При оценки рабочего пространства решают два вопроса:

- при известной кинематической схеме механизма определить рабочее пространство,

- при известном рабочем пространстве определить кинематическую схему.

Решение прямой задачи о положении позволяет определить положение и ориентацию в пространстве рабочего органа. Значения обобщенных координат манипулятора q_i , $i=1, \dots, N$ находятся в пределах, обусловленных конструкцией механизма:

$$q_{i \min} \leq q_i \leq q_{i \max}.$$

Эти условия показывают область изменения обобщенных координат. Каждому значению обобщенных координат соответствует определенное положение выходного звена. Таким образом, области изменения обобщенных координат соответствует область изменения области V рабочего пространства [48, 128]. Также, граница рабочего пространства определяется кинематической схемой механизма.

Оценить непосредственно размер и форму рабочей зоны можно путем исследования решений обратной задачи о положениях. При этом в большинстве случаев необходимо использовать итерационные алгоритмы [122, 123].

Для любого параллельного манипулятора в любой точке его рабочего пространства уравнения связи должны обращаться в тождества. В каждой точке рабочей зоны манипулятора существуют решения прямой и обратной задачи о положениях. Вне рабочей зоны, соответственно, решить уравнения связи невозможно. Определить рабочий объем и его геометрическую форму можно, рассчитав границы изменения абсолютных координат и решив обратную задачу о положении в каждой точке объема. Формирование рабочего пространства осуществляется численными методами по разработанному алгоритму (рис. 2.12).



Рис.2.12 Алгоритм определения рабочей зоны

Для рассматриваемого плоского манипулятора рабочая зона будет иметь следующий вид (рис. 2.13).

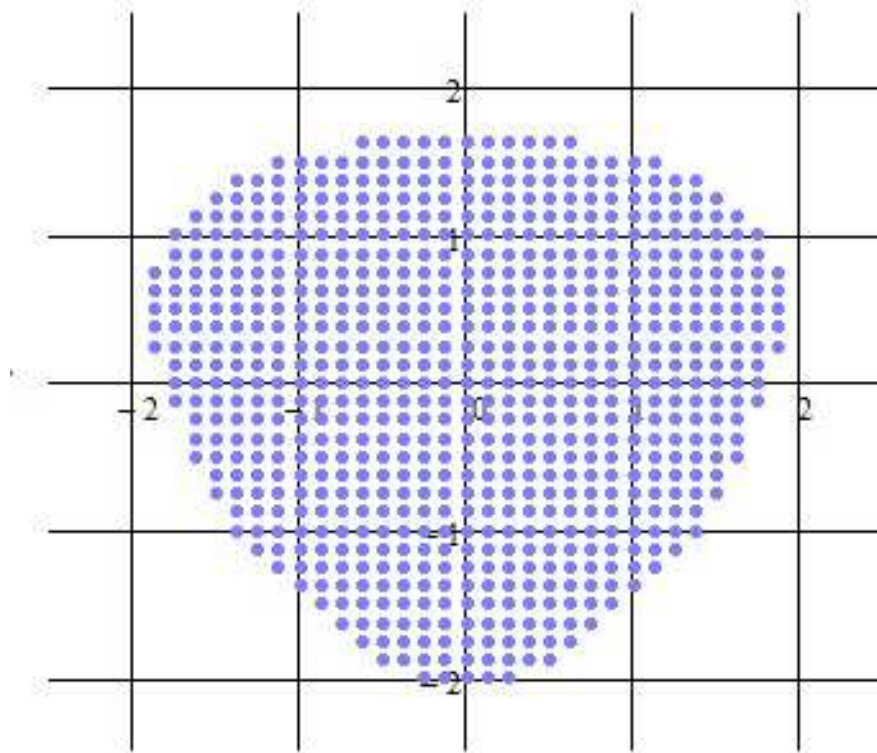


Рис.2.13 Рабочая зона плоского механизма

Таким образом, представлен алгоритм моделирования рабочей зоны механизма параллельной структуры и проведен расчет при известных длинах звеньев.

Выводы по главе 2

1. В главе рассмотрены вопросы структурно-параметрического синтеза плоских манипуляционных механизмов параллельной структуры с тремя степенями свободы, тремя кинематическими цепями на основе структурных формул. Показаны принципы построения таких механизмов.
2. Исследован плоский механизм с тремя степенями свободы. Для данной кинематической схемы манипулятора получены уравнения связи между обобщенными (независимыми) координатами, описывающими изменение положения входных звеньев механизма, и абсолютными координатами его выходного звена, разработаны математические модели для решения прямой и обратной задачи о положени-

ях. Полученное решение обратной задачи о положениях позволяет проводить дальнейшие кинематические и динамические исследования манипулятора, а также решать задачи управления.

3. Решены задачи о скоростях методами дифференцирования уравнений связей и аппаратом винтового исчисления. Полученные решения прямой и обратной задачи разными методами совпали.

4. Решена задача определения особых положений механизма двумя способами: исследованием свойств матриц Якоби и теории винтового исчисления.

5. В результате проведённого компьютерного моделирования получено решение определения рабочего пространства манипулятора. Показано, что размеры рабочего пространства зависят от длин всех промежуточных звеньев каждой кинематической цепи. Разработанные программы по определению рабочего пространства позволяют оценить его габариты, что необходимо для его установки в производственном помещении.

ГЛАВА 3. СИНТЕЗ И АНАЛИЗ ПОСТУПАТЕЛЬНО-НАПРАВЛЯЮЩИХ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

В главе рассматривается синтез, кинематический анализ поступательно-направляющих механизмов с тремя степенями свободы. Показаны принципы построения механизмов данного класса. Кинематический анализ, определение особых положений проводится на основе связей, налагаемых кинематическими цепями, а также на основе винтового исчисления. Точность механизмов показана на основе линейной теории точности.

3.1. Синтез поступательно-направляющих механизмов

В параграфе рассмотрен структурно-параметрический синтез поступательно-направляющих механизмов с тремя степенями свободы с тремя кинематическими цепями. В таких механизмах выходное звено имеет только поступательное движение. Каждая кинематическая цепь состоит из одной приводной поступательной пары [24, 174, 195, 204, 222]. Приводы могут быть с вращательными двигателями либо поступательными.

В основе построения таких манипуляторов положены две концепции синтеза поступательно-направляющих механизмов либо каждая кинематическая цепь налагает одинаковые связи либо каждая цепь налагает по одной связи – момент.

Кинематическая цепь в поступательно-направляющем механизме может содержать вращательные пары, поступательные или поступательные и вращательные. Поступательная пара может быть выполнена в виде шарнирного параллелограмма. Кинематическая цепь может содержать:

- три кинематические пары PPP, PaPP . (рис.3.1)
- четыре кинематические пары PaPaRR, RPPR , RRRP (рис.3.2)
- пять кинематических пар RPRRR, RRRRR, UPU (рис.3.3)

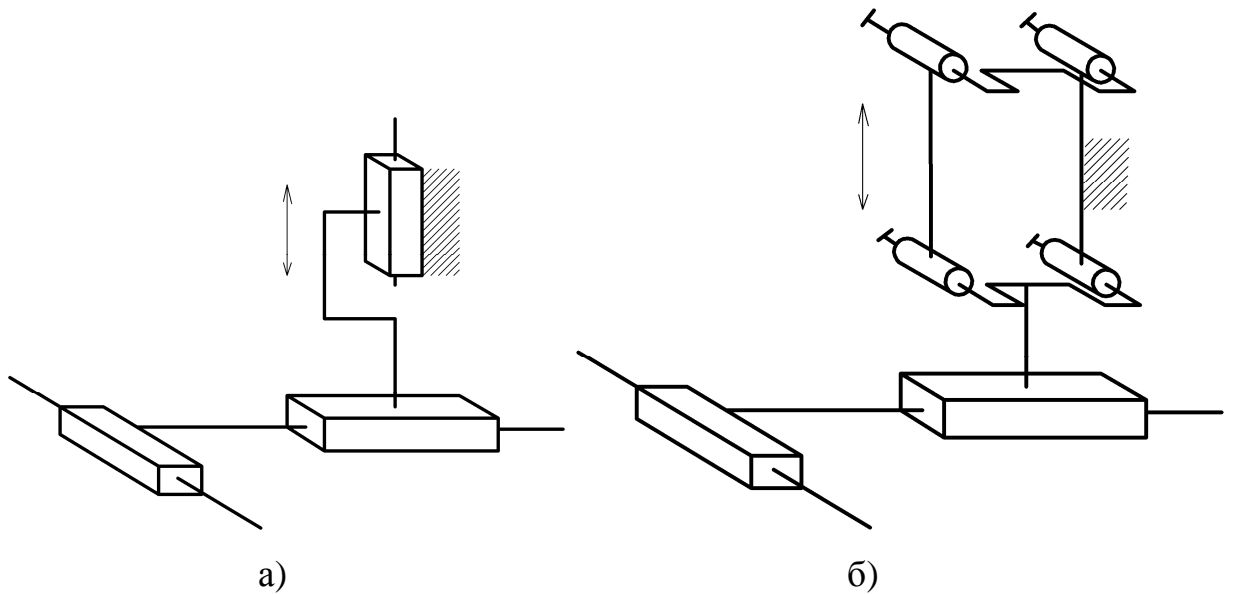
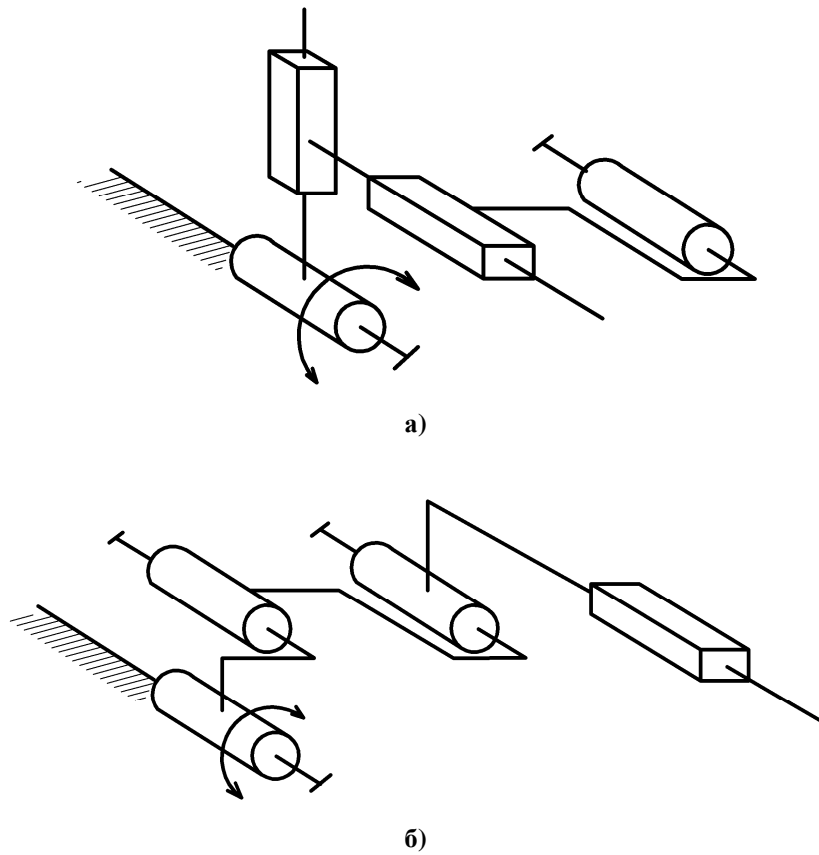


Рис. 3.1 Кинематическая цепь с тремя кинематическими парами
а – PPP, б – PaPP

В кинематических цепях с тремя поступательными парами их оси не должны быть компланарны. Цепь с поступательными парами налагает три связи.



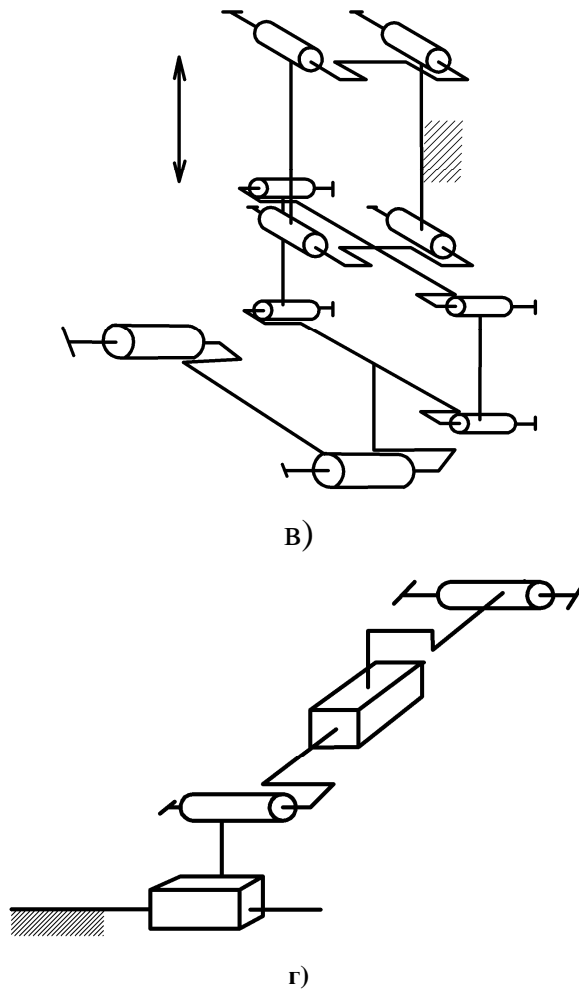
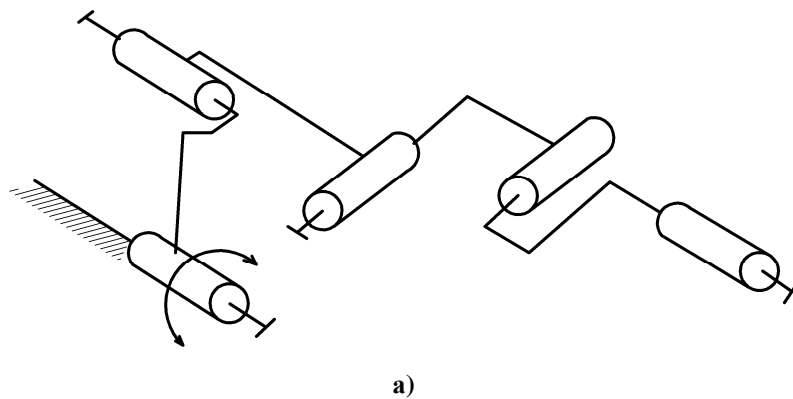


Рис. 3.2 Кинематическая цепь в четырьмя кинематическими парами

а – RPRR, б – RRRP,

в – PaPaRR, г – PRPR

Рассмотрим кинематические цепи с пятью кинематическими парами (рис.3.5). В таких цепях оси входных и выходных пар должны быть параллельны.



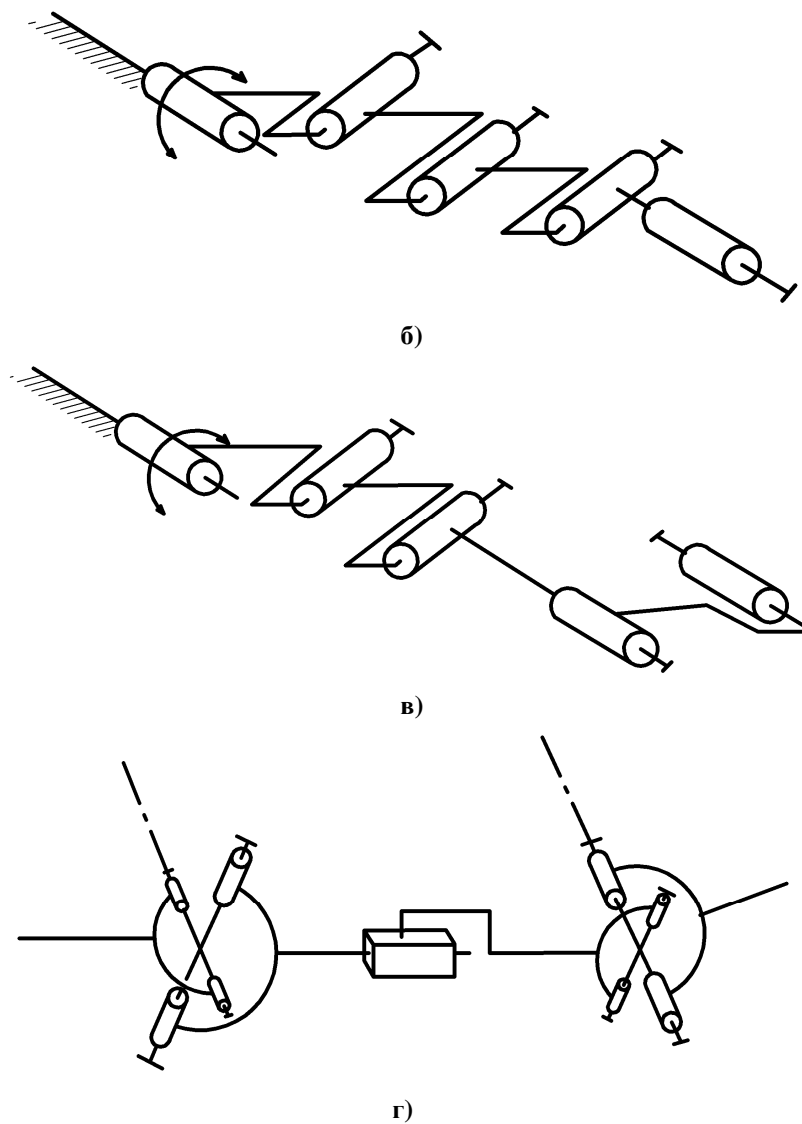


Рис. 3.3. Кинематическая цепь с пятью кинематическими парами
 а – RRRRR б – RRRRR, в – RRRRR, г – UPU

Такие цепи налагают по три связи – три момента (рис.3.4)

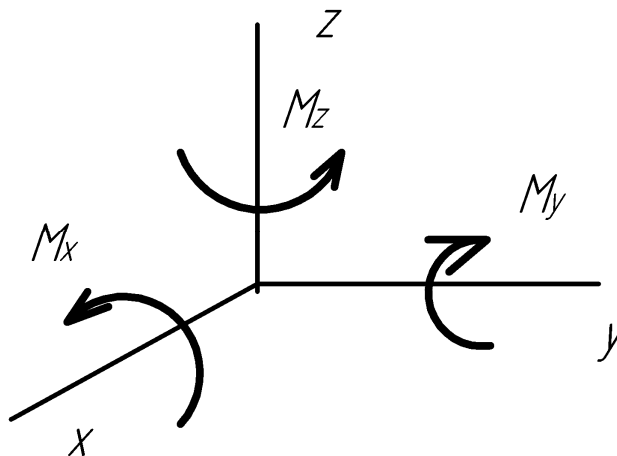


Рис. 3.4 Связи, налагаемые кинематическими цепями

Одним из наиболее известных механизмов является Дельта (рис.3.5 а) [146, 158, 212, 223]. Этот механизм состоит из трех цепей. Каждая цепь содержит вращательный двигатель, три вращательные кинематические пары, оси которых параллельны и шарнирный параллелограмм. Оси параллелограмма перпендикулярны оси приводной вращательной пары. Схему механизма можно записать в виде $3RRPaR$. Применив формулу Сомова-Малышева (2.2), получаем число степеней свободы равным нулю:

$$W = 6 \cdot (n - 1) - 5 \cdot p_5 = 6 \cdot (11 - 1) - 5 \cdot 4 \cdot 3 = 0.$$

Для определения числа степеней свободы уберем промежуточное звено параллелограмма (рис.3.5.б) и по формуле Сомова-Малышева рассчитаем число степеней свободы равно:

$$W = 6 \cdot (n - 1) - 5 \cdot p_5 = 6 \cdot (14 - 1) - 5 \cdot 15 = 3.$$

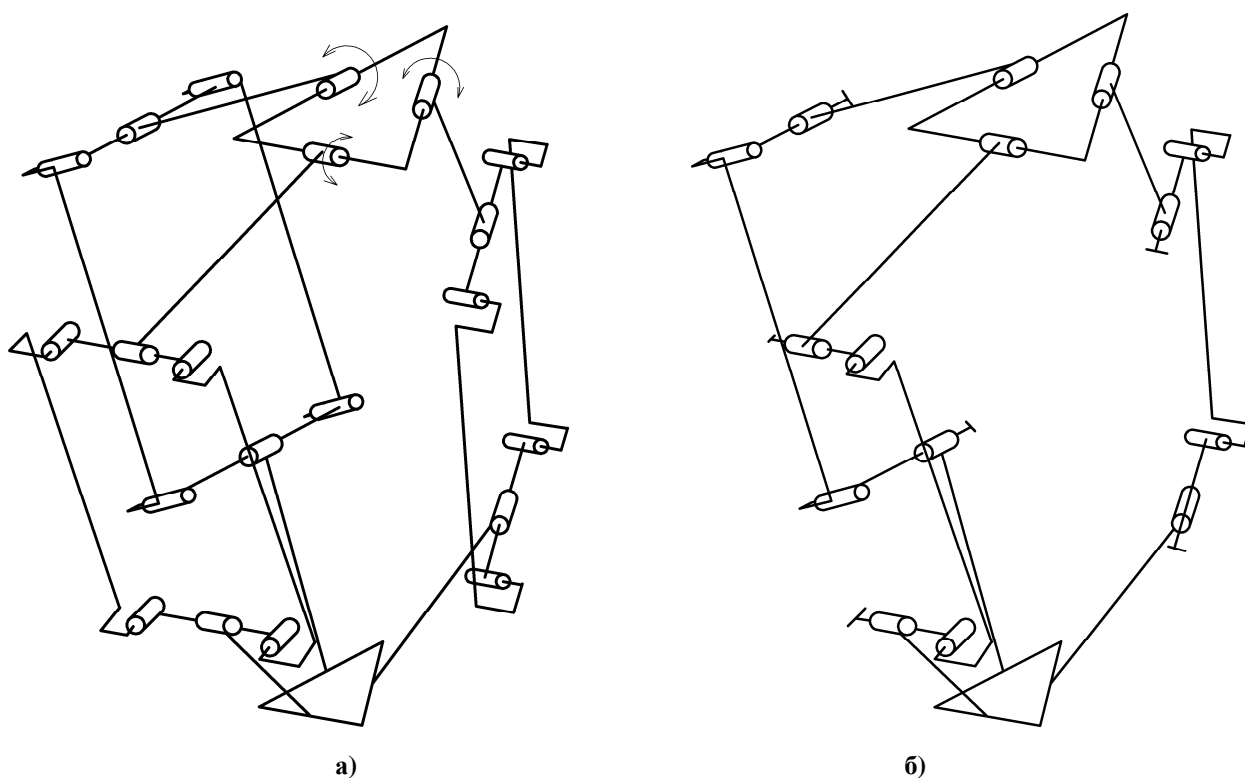


Рис. 3.5. Механизм Дельта
а – $3RRPaR$, б – $3RRRRR$

Восстановив убранный элемент, добавляем связь, причем она повторяющаяся. Таким образом, число степеней свободы механизма равно трем.

Если установить линейные двигатели, то кинематическая схема будет представлена в виде 3PRPaR [236]. Это известный механизм называемый ортогляйд (рис.3.6). Число степеней свободы также равно трем.

Рассмотрим механизм с пятью вращательными парами 3RRRRR (рис. 3.7) [71, 72, 86]. Число степеней свободы определяем по формуле (2.2):

$$W = 6 \cdot (n - 1) - 5 \cdot p_5 = 6 \cdot (14 - 1) - 5 \cdot 15 = 3.$$

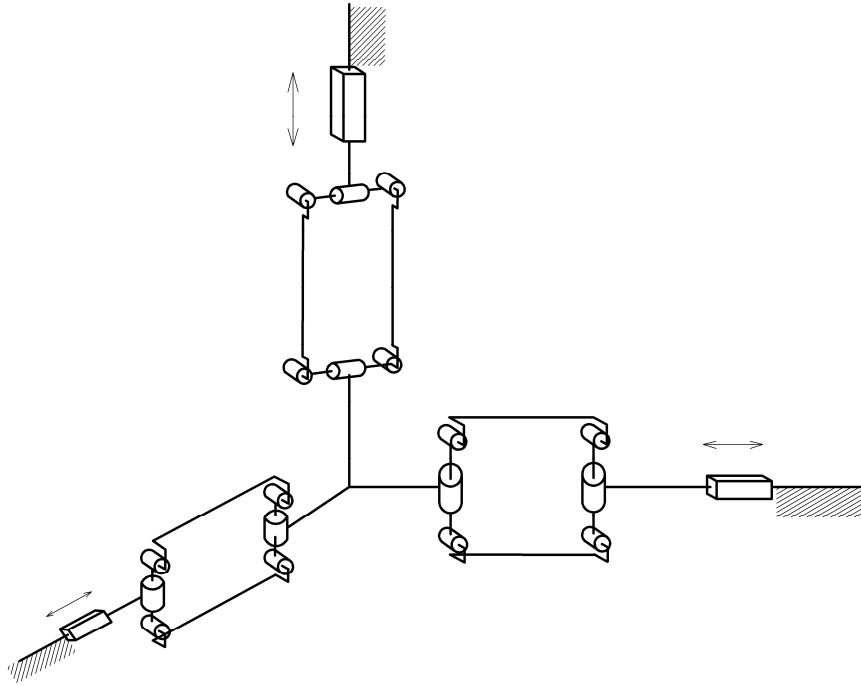


Рис.3.6. Механизм ортогляйд 3PRPaR

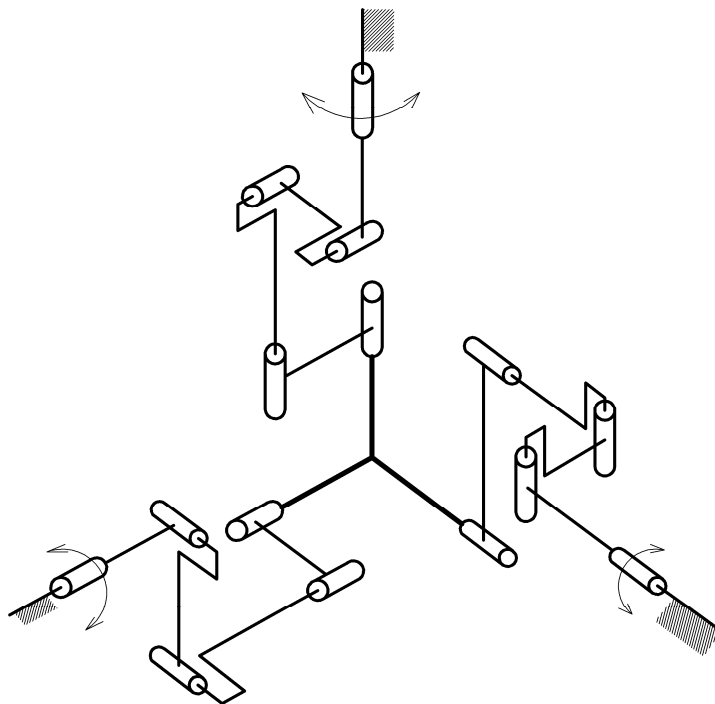


Рис. 3.7. Механизм 3–RRRRR

Поступательно-направляющий механизм, в котором достигнута изотропность, представлен схемой (рис.3.8). Каждый двигатель в механизме соответствует перемещению выходного звена только по одной координате, а передаточное отношение равно единице.

Число степеней свободы в этом механизме определим по формуле (2.2):

$$W = 6 \cdot (n - 1) - 5 \cdot p_5 = 6 \cdot (11 - 1) - 5 \cdot 12 = 0.$$

Однако механизм имеет три степени свободы, что объясняется повторяющимися связями – двумя моментами в каждой цепи.

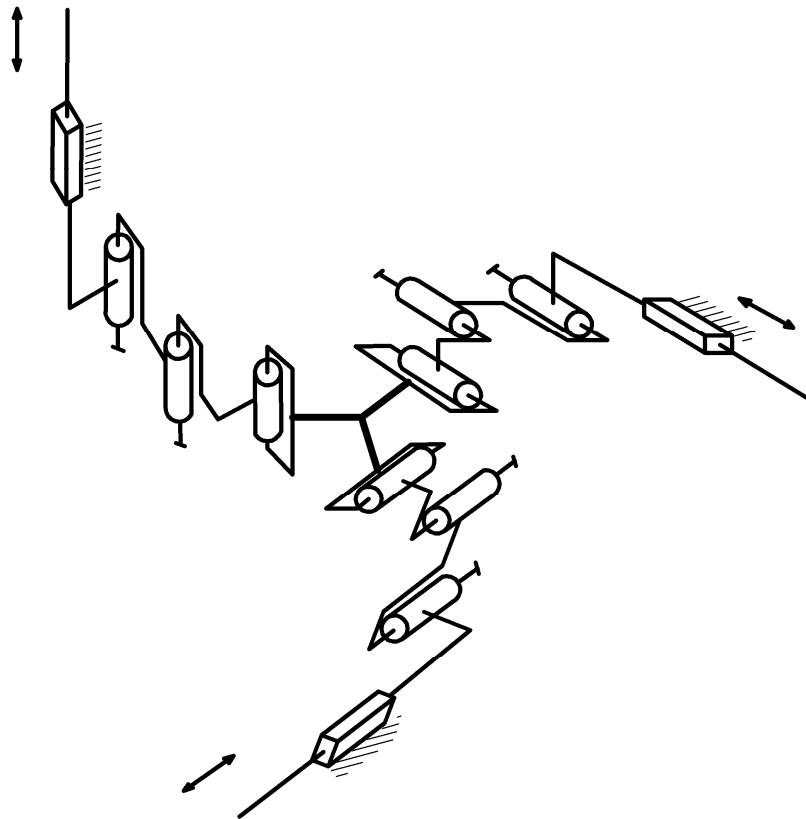


Рис.3.8 Изотропный механизм 3PRRR

В механизме (рис. 3.9) постоянство ориентации выходного звена достигается за счет того, что в каждой из трех кинематических цепей имеют место два карданных шарнира. Таким образом, три кинематические цепи «отбирают» три возможных вращения.

Число степеней свободы определяются по формуле (2.2):

$$W = 6 \cdot (n - 1) - 5 \cdot p_5 = 6 \cdot (14 - 1) - 5 \cdot 15 = 3.$$

Для обеспечения поступательного движения необходимо, чтобы входное звено первого шарнира Гука и выходное звено второго шарнира Гука были параллельны.

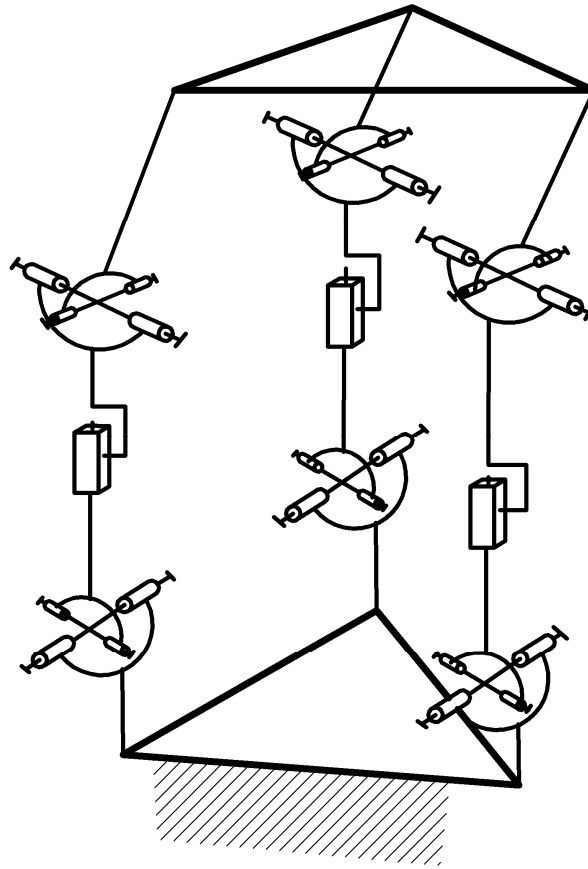


Рис. 3.9. Механизм 3UPU

Таким образом, показана методика синтеза и анализа поступательно-направляющего механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы на основе связей налагаемых кинематическими цепями. Представлены кинематические цепи с различными кинематическими парами. Показано, что оси первой и последней пар параллельны.

Связи, налагаемые кинематическими цепями могут быть повторяющимися (одинаковые в каждой), либо неповторяющимися, при этом характер движения не меняется.

3.2. Решение задачи о положении

Рассмотрим манипулятор параллельной структуры, в котором для обеспечения поступательных перемещений в каждой кинематической цепи содержится по три поступательные пары, причем две из трех пар выполнены в виде шарнирного параллелограмма [117]. Данный манипулятор имеет три замкнутые кинематические цепи, обладает тремя степенями свободы: перемещение вдоль осей x, y, z (рис.3.10).

Для структурного анализа параллельных механизмов существует формула Сомова – Малышева.

Для поступательной направляющей кинематической структуры запрещены изначально все вращения вокруг осей, поэтому возможно применение следующей формулы (2.1). Согласно этому выражению число степеней свободы рассматриваемого механизма равно:

$$W = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot p_5 - p_4 = 3 \cdot (8 - 1) - 2 \cdot 9 - 1 \cdot 0 = 21 - 18 = 3.$$

Таким образом, данный манипулятор имеет три замкнутые кинематические цепи, обладает тремя степенями свободы: перемещение вдоль осей x, y, z .

Рассмотрим перемещения в первой кинематической цепи. Точка B_1 перемещается вдоль оси x . Точка C_1 перемещается по окружности радиуса l_1 на угол φ_{11} в плоскости xoz . Точка A_1 будет перемещаться также по окружности радиуса l_2 в плоскости, параллельной плоскости xoy , на угол φ_{12} . При этом расстояние от точки A_1 до центра платформы (до точки O) равно длине l_3 (рис.3.11).

Перемещения по окружности направлены против часовой стрелки, при взгляде со стороны положительно направленной оси вращения.

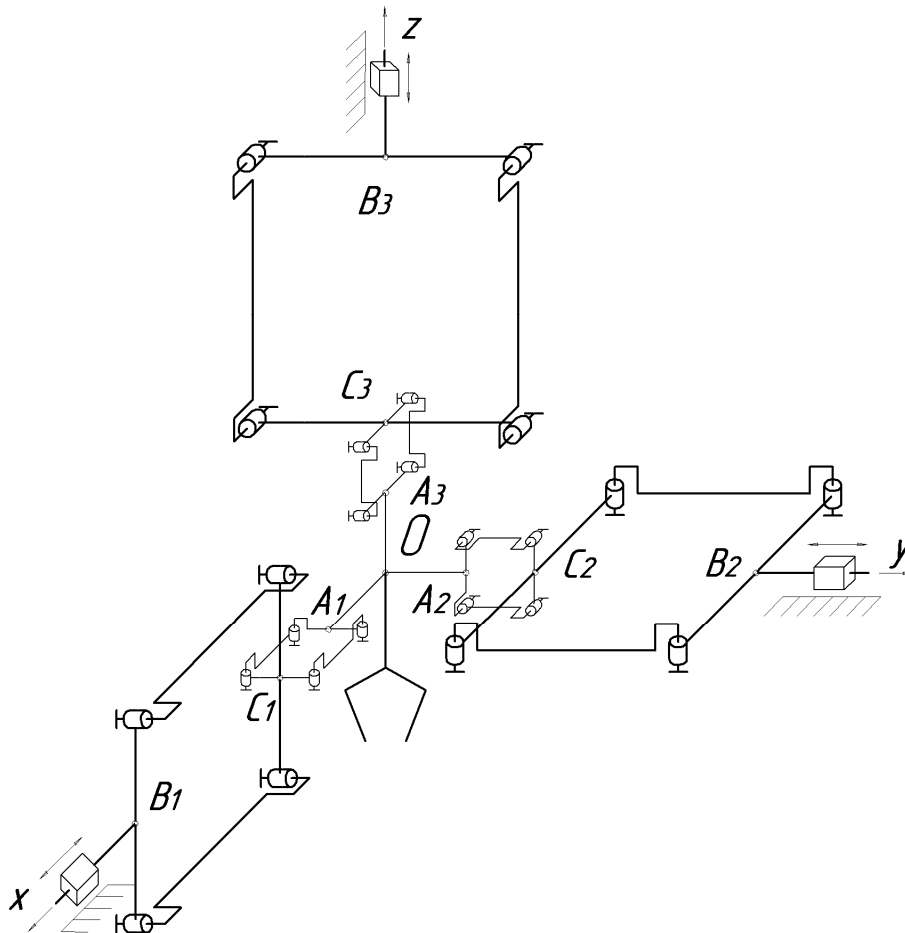


Рис. 3.10 Поступательно-направляющий манипулятор параллельной структуры с тремя степенями свободы

Запишем уравнения для описанных перемещений (идем от точки B_1 к C_1 , далее к A_1).

Координаты точки $C_1(x_{C1}; y_{C1}; z_{C1})$ определяются как:

$$x_{C1} = x_{B1} - l_1 \cdot \cos \varphi_{11}; \quad (3.1)$$

$$y_{C1} = 0; \quad (3.2)$$

$$z_{C1} = l_1 \cdot \sin \varphi_{11}. \quad (3.3)$$

Координаты точки $A_1(x_{A1}; y_{A1}; z_{A1})$ составляют:

$$x_{A1} = x_{C1} - l_2 \cdot \cos \varphi_{12}; \quad (3.4)$$

$$y_{A1} = -l_2 \cdot \sin \varphi_{12}; \quad (3.5)$$

$$z_{A1} = z_{C1}, \quad (3.6)$$

где l_1, l_2 – длины сторон параллелограммов;

$\varphi_{11}, \varphi_{12}$ – углы поворотов в первом и втором параллелограммах.

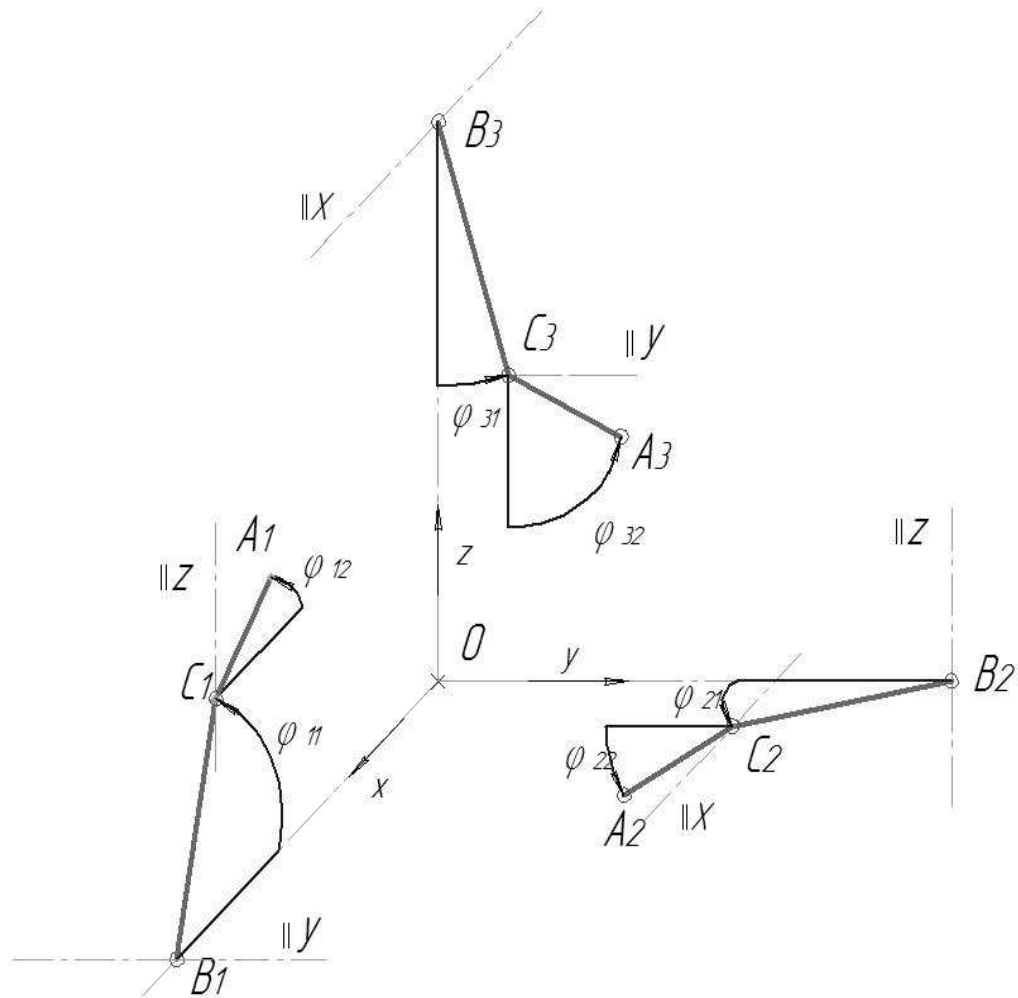


Рис. 3.11 Перемещения в трех кинематических цепях

Координаты точки $B_1(x_{B_1}; y_{B_1}; z_{B_1})$ z_{B_1} и y_{B_1} находятся на осях oz и oy соответственно, т.е. $y_{B_1} = 0$, $z_{B_1} = 0$

Предполагаем, что известно перемещение платформы. Для нахождения перемещения в приводах задаём координаты $O(x_o; y_o; z_o)$ и фактически, учитывая длину l_3 , имеем координаты точки $A_1(x_{A_1}; y_{A_1}; z_{A_1})$. Выражаем координаты точки B_1 через координаты A_1 . Из уравнения (3.6) найдем угол поворота в первом параллелограмме:

$$\varphi_{12} = -\arcsin \frac{y_{A_1}}{l_2}. \quad (3.7)$$

С учетом равенств (3.6) и (3.3) из уравнения:

$$z_{A_1} = z_{C_1} = l_1 \sin \varphi_{11}$$

вычисляем угол поворота во втором параллелограмме:

$$\varphi_{11} = \arcsin \frac{z_{A1}}{l_1}. \quad (3.8)$$

Перепишем равенства (3.1) и (3.4) в виде:

$$x_{B1} = x_{C1} + l_1 \cdot \cos \varphi_{11}; \quad (3.9)$$

$$x_{C1} = x_{A1} + l_2 \cdot \cos \varphi_{12}. \quad (3.10)$$

После подстановки уравнения (3.10) в уравнение (3.9) имеем:

$$x_{B1} = x_{A1} + l_2 \cdot \cos \varphi_{12} + l_1 \cdot \cos \varphi_{11}. \quad (3.11)$$

Заменяя в уравнении (3.11) углы согласно уравнениям (3.7), (3.8), получаем:

$$x_{B1} = x_{A1} + l_2 \cdot \cos \left(-\arcsin \frac{y_{A1}}{l_2} \right) + l_1 \cdot \cos \left(\arcsin \frac{z_{A1}}{l_1} \right). \quad (3.12)$$

Из уравнения (3.12) следует, что данная кинематическая цепь характеризует перемещение только вдоль оси x .

Аналогично строим схемы перемещения для второй и третьей кинематических цепей и вычисляем зависимости координат точек B_i от координат точки A_i ($i=2,3$);

координаты точки $C_2(x_{C2}; y_{C2}; z_{C2})$:

$$x_{C2} = l_1 \cdot \sin \varphi_{21}; \quad y_{C2} = y_{B2} - l_1 \cdot \cos \varphi_{21}; \quad z_{C2} = 0 \quad (3.13)$$

координаты точки $A_2(x_{A2}; y_{A2}; z_{A2})$:

$$x_{A2} = x_{C2}, \quad y_{A2} = y_{C2} - l_2 \cdot \cos \varphi_{22}, \quad z_{A2} = -l_2 \cdot \sin \varphi_{22} \quad (3.14)$$

Координаты точки $B_2(x_{B2}; y_{B2}; z_{B2})$:

$$x_{B2} = 0; \quad y_{B2} = y_{A2} + l_2 \cdot \cos \left(-\arcsin \frac{z_{A2}}{l_2} \right) + l_1 \cdot \cos \left(\arcsin \frac{x_{A2}}{l_1} \right) \quad z_{B2} = 0 \quad (3.15)$$

координаты точки $C_3(x_{C3}; y_{C3}; z_{C3})$:

$$x_{C3} = 0; \quad y_{C3} = l_1 \cdot \sin \varphi_{31}; \quad z_{C3} = z_{B3} - l_1 \cdot \cos \varphi_{31} \quad (3.16)$$

координаты точки $A_3(x_{A3}; y_{A3}; z_{A3})$:

$$x_{A3} = -l_2 \cdot \sin \varphi_{32}; \quad y_{A3} = y_{C3}; \quad z_{A3} = y_{C3} - l_2 \cdot \cos \varphi_{32} \quad (3.17)$$

координаты точки $B_3(x_{B3}; y_{B3}; z_{B3})$:

$$x_{B3} = 0; \quad y_{B3} = 0;$$

$$z_{B3} = z_{A3} + l_2 \cdot \cos\left(-\arcsin \frac{x_{A3}}{l_2}\right) + l_1 \cdot \cos\left(\arcsin \frac{y_{A3}}{l_1}\right) \quad (3.18)$$

В дальнейших расчетах обозначим входные координаты механизма в точках $B_1(q_1; 0; 0)$ $B_2(0; q_2; 0)$ $B_3(0; 0; q_3)$

Решая уравнения (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17) запишем систему уравнений, показывающих зависимость между координатами точек B_i и A_i :

$$\begin{cases} q_1 = x_{A1} + l_2 \cdot \cos\left(-\arcsin \frac{y_{A1}}{l_2}\right) + l_1 \cdot \cos\left(\arcsin \frac{z_{A1}}{l_1}\right); \\ q_2 = y_{A2} + l_2 \cdot \cos\left(-\arcsin \frac{z_{A2}}{l_2}\right) + l_1 \cdot \cos\left(\arcsin \frac{x_{A2}}{l_1}\right); \\ q_3 = z_{A3} + l_2 \cdot \cos\left(-\arcsin \frac{x_{A3}}{l_2}\right) + l_1 \cdot \cos\left(\arcsin \frac{y_{A3}}{l_1}\right). \end{cases} \quad (3.19)$$

Задача о положениях манипулятора описывается функцией положения механизма, которая в неявном виде выражается уравнением:

$$F(x_0, y_0, z_0, q_1, q_2, q_3) = 0.$$

Уравнение связи для поступательно – направляющего манипулятора с тремя кинематическими парами можно представить системой уравнений в общем виде:

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0, z_0, q_1) = 0; \\ F_2(x_0, y_0, z_0, q_2) = 0; \\ F_3(x_0, y_0, z_0, q_3) = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Подставив в уравнения (3.20) выражения (3.19) получаем функцию положения:

$$\begin{cases} F_1 = q_1 - x_0 - l_3 - l_2 \cos\left(-\arcsin \frac{y_0}{l_2}\right) - l_1 \cos\left(\arcsin \frac{z_0}{l_1}\right) = 0; \\ F_2 = q_2 - y_0 - l_3 - l_2 \cos\left(-\arcsin \frac{z_0}{l_2}\right) - l_1 \cos\left(\arcsin \frac{x_0}{l_1}\right) = 0; \\ F_3 = q_3 - z_0 - l_3 - l_2 \cos\left(-\arcsin \frac{x_0}{l_2}\right) - l_1 \cos\left(\arcsin \frac{y_0}{l_1}\right) = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Используя обратную задачу о положении можно определить рабочую зону механизма, показанную на рис. 3.12. [122, 123].

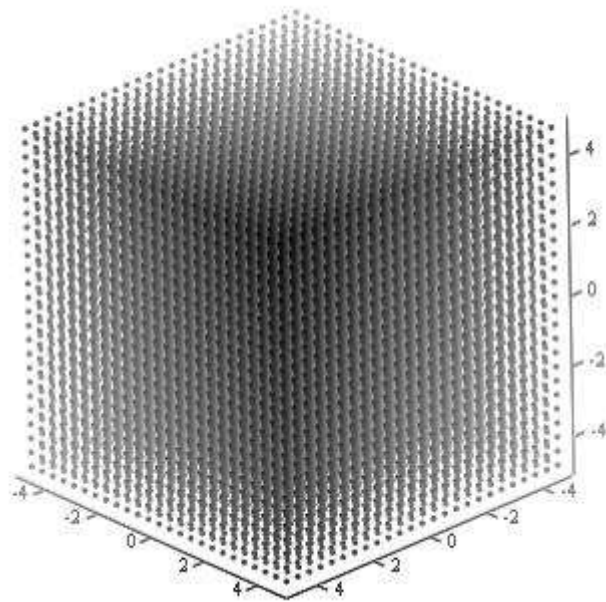


Рис.3.12 Рабочая зона механизма

Итак, на основе структурных формул исследован поступательно-направляющий механизм, получены уравнения связей, решена задача о положении. Определена рабочая зона механизма. Она представляет куб.

3.3. Решение задач о скоростях и особых положениях

В параграфе рассмотрено решение задачи о скоростях, определение особых положений двумя подходами: дифференцированием уравнений связей и методом винтового исчисления.

3.3.1. Решение задачи о скоростях на основе уравнений связей

Для решения задачи о скоростях будем использовать аналитический подход, основанный на изучении свойств матрицы Якоби, представленной в общем виде [178]:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = (-\mathbf{B}) \cdot \mathbf{V}_{II}, \quad (3.22)$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_0} & \frac{\partial F_1}{\partial y_0} & \frac{\partial F_1}{\partial z_0} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_0} & \frac{\partial F_2}{\partial y_0} & \frac{\partial F_2}{\partial z_0} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_0} & \frac{\partial F_3}{\partial y_0} & \frac{\partial F_3}{\partial z_0} \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \end{pmatrix}; \mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}; \mathbf{V}_{ii} = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix}.$$

Здесь: \mathbf{A} – матрица частных производных от неявной функции по x_0, y_0, z_0 ;

\mathbf{B} – матрица частных производных от неявной функции по обобщенным координатам q_1, q_2, q_3 ;

\mathbf{V} – вектор скорости выходного звена, разложенный на оси x, y, z – V_x, V_y, V_z ;

\mathbf{V}_{ii} – обобщенные скорости во входных звеньях (входные скорости).

Запишем уравнение (3.22) в виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_0} & \frac{\partial F_1}{\partial y_0} & \frac{\partial F_1}{\partial z_0} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_0} & \frac{\partial F_2}{\partial y_0} & \frac{\partial F_2}{\partial z_0} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_0} & \frac{\partial F_3}{\partial y_0} & \frac{\partial F_3}{\partial z_0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

и найдем частные производные от неявной функции по обобщенным и абсолютным координатам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_0} &= -1; & \frac{\partial F_1}{\partial y_0} &= \frac{y_0}{l_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{l_2^2}}}; & \frac{\partial F_1}{\partial z_0} &= \frac{z_0}{l_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{l_1^2}}}; \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_0} &= \frac{x_0}{l_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{l_1^2}}}; & \frac{\partial F_2}{\partial y_0} &= -1; & \frac{\partial F_2}{\partial z_0} &= \frac{z_0}{l_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{l_2^2}}}; \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_0} &= \frac{x_0}{l_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{l_2^2}}}; & \frac{\partial F_3}{\partial y_0} &= \frac{y_0}{l_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{l_1^2}}}; & \frac{\partial F_3}{\partial z_0} &= -1; \\ \frac{\partial F_1}{\partial q_1} &= 1; & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} &= 1; & \frac{\partial F_3}{\partial q_3} &= 1. \end{aligned}$$

После подстановки значений частных производных в уравнение (3.23) уравнение скоростей примет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{y_0}{l_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{l_2^2}}} & \frac{z_0}{l_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{l_1^2}}} \\ \frac{x_0}{l_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{l_1^2}}} & -1 & \frac{z_0}{l_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{l_2^2}}} \\ \frac{x_0}{l_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{l_2^2}}} & \frac{z_0}{l_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{l_2^2}}} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Полученные уравнения позволяют решить прямую и обратную задачи о скоростях.

Пример решения задачи о скоростях. Решим обратную задачу о скоростях, т.е. определим скорость входного звена. зададим скорости входного звена $V_{11}=1$ м/с, $V_{21}=1,5$ м/с, $V_{31}=2$ м/с и положение выходного звена в точке $O(0,5; 0,5; 0,5)$. После дифференцирования уравнения связей уравнение скоростей (3.24) будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0,577 & 0,577 \\ 0,577 & -1 & 0,577 \\ 0,577 & 0,577 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Откуда находим значения обобщенных скоростей:

$$V_x = -10,013 \text{ м/с}, \quad V_y = -9,696 \text{ м/с}, \quad V_z = -9,379 \text{ м/с}.$$

Таким образом, используя уравнения дифференцирования связей получено решение обратной задачи о скоростях. Задавая обобщенные скорости, можно определить скорости абсолютные (выходного звена).

3.3.2. Решение прямой задачи о скоростях методом винтового исчисления

Для решения прямой задачи о скоростях методом винтового исчисления необходимо найти силовые и кинематические винты.

Относительный момент $mom(\mathbf{R}, \mathbf{\Omega})$ – сумма скалярных произведений вектора первого винта на момент второго относительно некоторой точки и вектора второго винта на момент первого относительно той же точки.

Обозначив \mathbf{R} – силовой винт, действующий на выходное звено со стороны i -й кинематической цепи ($i=1-3$), имеем:

$$mom(\mathbf{R}, \mathbf{\Omega}) = mom(\mathbf{R}, \mathbf{\Omega}_{11}),$$

где $\mathbf{\Omega}$ – кинематический винт выходного звена; $\mathbf{\Omega}_{11}$ – кинематический винт входного звена, или:

$$mom(\mathbf{R}, \mathbf{\Omega}) = V_x r_{ix} + V_y r_{iy} + V_z r_{iz};$$

$$mom(f, \mathbf{\Omega}_{11}) = V_{i1} (r_{ix} + r_{iy} + r_{iz});$$

где r_{ix}, r_{iy}, r_{iz} – плюккеровы координаты силового винта.

Составим систему уравнений для трех кинематических цепей:

$$V_x \cdot r_{1x} + V_y \cdot r_{1y} + V_z \cdot r_{1z} = V_{11} \cdot (r_{1x} + r_{1y} + r_{1z});$$

$$V_x \cdot r_{2x} + V_y \cdot r_{2y} + V_z \cdot r_{2z} = V_{21} \cdot (r_{2x} + r_{2y} + r_{2z}); \quad (3.25)$$

$$V_x \cdot r_{3x} + V_y \cdot r_{3y} + V_z \cdot r_{3z} = V_{31} \cdot (r_{3x} + r_{3y} + r_{3z}).$$

Для решения задачи о скоростях определим плюккеровы координаты четвертого силового винта, который появляется при торможении входного звена. Три момента, создаваемые тремя силами, запрещают вращение.

Единичный вектор \mathbf{E}_{11} , перпендикулярный плоскости, которая образована двумя векторами: вектором, расположенным вдоль оси промежуточного звена первого параллелограмма, и вектором направления оси вращения кинематической пары (оси, параллельной ou), представляет собой:

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ e_{11x} & e_{11y} & e_{11z} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } e_{11x} = \frac{x_{B1} - x_{C1}}{l_1} = \cos \varphi_{11}; \quad e_{11y} = \frac{y_{B1} - x_{C1}}{l_1} = 0; \quad e_{11z} = \frac{z_{B1} - z_{C1}}{l_1} = -\sin \varphi_{11}$$

или:

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos \varphi_{11} & 0 & -\sin \varphi_{11} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = i \cdot (\sin \varphi_{11}) + j \cdot (0) + k \cdot (\cos \varphi_{11}).$$

Единичный вектор \mathbf{E}_{12} , перпендикулярный плоскости, которая образована двумя векторами: вектором, расположенным вдоль оси промежуточного звена второго параллелограмма, и вектором направления оси вращения кинематической пары (оси, параллельной oz), представляет собой:

$$\mathbf{E}_{12} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ e_{12x} & e_{12y} & e_{12z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } e_{12x} = \frac{x_{C2} - x_{A2}}{l_2} = \cos \varphi_{12}; \quad e_{12y} = \frac{y_{C2} - y_{A2}}{l_2} = \sin \varphi_{12}; \quad e_{12z} = \frac{z_{C2} - z_{A2}}{l_2} = 0$$

или:

$$\mathbf{E}_{12} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos \varphi_{12} & \sin \varphi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = i \cdot (\sin \varphi_{12}) + j \cdot (-\cos \varphi_{12}) + k \cdot (0).$$

Силовой винт \mathbf{R}_1 будет перпендикулярен плоскости, образованной единичными векторами \mathbf{E}_{11} и \mathbf{E}_{12} , и равен:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ E_{11x} & E_{11y} & E_{11z} \\ E_{12x} & E_{12y} & E_{12z} \end{pmatrix},$$

или:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \sin\varphi_{11} & 0 & \cos\varphi_{11} \\ \sin\varphi_{12} & -\cos\varphi_{12} & 0 \end{pmatrix} = i \cdot (\cos\varphi_{12} \cdot \cos\varphi_{11}) + \\ + j \cdot (\sin\varphi_{12} \cdot \cos\varphi_{11}) + k \cdot (-\cos\varphi_{12} \cdot \sin\varphi_{11})$$

Единичный вектор \mathbf{E}_{12} , перпендикулярный плоскости, которая образована двумя векторами: вектором, расположенным вдоль оси промежуточного звена первого параллелограмма, и вектором направления оси вращения кинематической пары (оси параллельной oz), представляет собой:

$$\mathbf{E}_{21} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ e_{21x} & e_{21y} & e_{21z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } e_{21x} = \frac{x_{B2} - x_{C2}}{l_1} = -\sin\varphi_{21}; \quad e_{21y} = \frac{y_{B2} - y_{C2}}{l_1} = \cos\varphi_{21}; \quad e_{21z} = \frac{z_{B2} - z_{C2}}{l_1} = 0,$$

или

$$\mathbf{E}_{21} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin\varphi_{21} & \cos\varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = i \cdot (\cos\varphi_{21}) + j \cdot (\sin\varphi_{21}) + k \cdot (0).$$

Единичный вектор \mathbf{E}_{22} , перпендикулярный плоскости, которая образована двумя векторами: вектором, расположенным вдоль оси промежуточного звена второго параллелограмма, и вектором направления оси вращения кинематической пары (оси параллельной ox), представляет собой:

$$\mathbf{E}_{22} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ e_{22x} & e_{22y} & e_{22z} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } e_{22x} = \frac{x_{C2} - x_{A2}}{l_2} = 0; \quad e_{22y} = \frac{y_{C2} - y_{A2}}{l_2} = \cos\varphi_{22}; \quad e_{22z} = \frac{z_{C2} - z_{A2}}{l_2} = \sin\varphi_{22},$$

или :

$$\mathbf{E}_{22} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & \cos\varphi_{22} & \sin\varphi_{22} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \cdot (0) + j \cdot (\sin\varphi_{22}) + k \cdot (-\cos\varphi_{22}).$$

Силовой винт \mathbf{R}_2 будет перпендикулярен плоскости, образованной единич-

ными векторами \mathbf{E}_{21} и \mathbf{E}_{22} , и равен $\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ E_{21x} & E_{21y} & E_{21z} \\ E_{22x} & E_{22y} & E_{22z} \end{pmatrix}$, или:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\varphi_{21} & \sin\varphi_{21} & 0 \\ 0 & \sin\varphi_{22} & -\cos\varphi_{22} \end{pmatrix} = i \cdot (-\sin\varphi_{21} \cdot \cos\varphi_{22}) + \\ + j \cdot (\cos\varphi_{21} \cdot \cos\varphi_{22}) + k \cdot (-\cos\varphi_{21} \cdot \sin\varphi_{22}).$$

Единичный вектор \mathbf{E}_{31} , перпендикулярный плоскости, которая образована двумя векторами: вектором, расположенным вдоль оси промежуточного звена первого параллелограмма, и вектором направления оси вращения кинематической пары (оси, параллельной ox), представляет собой

$$\mathbf{E}_{31} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ e_{31x} & e_{31y} & e_{31z} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Где $e_{31x} = \frac{x_{B3} - x_{C3}}{l_1} = 0$; $e_{31y} = \frac{y_{B3} - y_{C3}}{l_1} = -\sin\varphi_{31}$; $e_{31z} = \frac{z_{B3} - z_{C3}}{l_1} = \cos\varphi_{31}$,

или:

$$\mathbf{E}_{31} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & -\sin\varphi_{31} & \cos\varphi_{31} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \cdot (0) + j \cdot (\cos\varphi_{31}) + k \cdot (\sin\varphi_{31}).$$

Единичный вектор \mathbf{E}_{32} , перпендикулярный плоскости, которая образована двумя векторами: вектором, расположенным вдоль оси промежуточного звена второго параллелограмма, и вектором направления оси вращения кинематической пары (оси, параллельной oy), представляет собой:

$$\mathbf{E}_{32} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ e_{32x} & e_{32y} & e_{32z} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $e_{32x} = \frac{x_{C3} - x_{A3}}{l_2} = \sin\varphi_{32}$; $e_{32y} = \frac{y_{C3} - y_{A3}}{l_2} = 0$; $e_{32z} = \frac{z_{C3} - z_{A3}}{l_2} = \cos\varphi_{32}$,

или:

$$\mathbf{E}_{32} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \sin \varphi_{32} & 0 & \cos \varphi_{32} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = i \cdot (-\cos \varphi_{32}) + j \cdot (0) + k \cdot (\sin \varphi_{32}).$$

Силовой винт \mathbf{R}_3 будет перпендикулярен плоскости, образованной единичными векторами \mathbf{E}_{31} и \mathbf{E}_{32} , и равен $\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ E_{31x} & E_{31y} & E_{31z} \\ E_{32x} & E_{32y} & E_{32z} \end{pmatrix}$, или:

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & \cos \varphi_{31} & \sin \varphi_{31} \\ -\cos \varphi_{32} & 0 & \sin \varphi_{32} \end{pmatrix} = i \cdot (\cos \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32}) + \\ + j \cdot (\sin \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32}) + k \cdot (\cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32}).$$

Плюккеровы координаты силового винта можно определить и другим способом.

Рассмотрим первую кинематическую цепь. Во втором шарнире в начальном положении ось поступательной пары, соответствующая первому параллелограмму, направлена вдоль оси oz и имеет координаты $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. При повороте вокруг оси oy

ее координаты будут определяться произведением координат в начальном положении на матрицу поворота вокруг оси oy :

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{11} & 0 & \sin \varphi_{11} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{11} & 0 & \cos \varphi_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{11} \\ 0 \\ \cos \varphi_{11} \end{pmatrix}.$$

В третьем шарнире в начальном положении ось поступательной пары, соответствующая второму параллелограмму, направлена вдоль оси oy и имеет координаты $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. При повороте вокруг оси oz ее координаты будут определяться произведе-

нем координат в начальном положении на матрицу поворота вокруг оси oz :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{13} \\ y_{13} \\ z_{13} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} & -\sin \varphi_{12} & 0 \\ \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{12} \\ -\cos \varphi_{12} \\ 0 \end{pmatrix}; \\
\mathbf{R}_1 &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_{13} & y_{13} & z_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \sin \varphi_{11} & 0 & \cos \varphi_{11} \\ \sin \varphi_{12} & -\cos \varphi_{12} & 0 \end{pmatrix} = \\
&= i \cdot (\cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{11}) + j \cdot (\sin \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{11}) + k \cdot (-\cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11}); \\
r_{1x} &= \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{11}; \\
r_{1y} &= \sin \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{11}; \\
r_{1z} &= -\cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Рассмотрим вторую кинематическую цепь. Во втором шарнире в начальном положении ось поступательной пары, соответствующая первому параллелограмму, направлена вдоль оси ox и имеет координаты

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. При повороте вокруг оси oz

ее координаты будут определяться произведением координат в начальном положении на матрицу поворота вокруг оси oz :

$$\begin{pmatrix} x_{21} \\ y_{21} \\ z_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{21} & 0 \\ \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} \\ \sin \varphi_{21} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В третьем шарнире в начальном положении ось поступательной пары, соответствующая второму параллелограмму, направлена вдоль оси oz и имеет координаты

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. При повороте вокруг оси ox ее координаты будут определяться произ-

ведением координат в начальном положении на матрицу поворота вокруг оси ox :

$$\begin{pmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{22} & -\sin \varphi_{22} \\ 0 & \sin \varphi_{22} & \cos \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \varphi_{22} \\ -\cos \varphi_{22} \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_2 &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_{21} & y_{21} & z_{21} \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos \varphi_{21} & \sin \varphi_{21} & 0 \\ 0 & \sin \varphi_{22} & -\cos \varphi_{22} \end{pmatrix} = \\
&= i \cdot (-\cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{21}) + j \cdot (\cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{22}) + k \cdot (-\cos \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22}); \\
r_{2x} &= -\cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{21}; \\
r_{2y} &= \cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{22} \\
r_{2z} &= -\cos \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Рассмотрим третью кинематическую цепь. Во втором шарнире в начальном положении ось поступательной пары, соответствующая первому параллелограмму, направлена вдоль оси ou и имеет координаты $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. При повороте вокруг оси ox , ее координаты будут определяться произведением координат в начальном положении на матрицу поворота вокруг оси ox :

$$\begin{pmatrix} x_{31} \\ y_{31} \\ z_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{31} & -\sin \varphi_{31} \\ 0 & \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi_{31} \\ \sin \varphi_{31} \end{pmatrix}.$$

В третьем шарнире в начальном положении ось поступательной пары, соответствующая второму параллелограмму, направлена вдоль оси ox и имеет координаты $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. При повороте вокруг оси ou ее координаты будут определяться произведением координат в начальном положении на матрицу поворота вокруг оси ou :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_{32} \\ y_{32} \\ z_{32} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_{32} & 0 & \sin \varphi_{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{32} & 0 & \cos \varphi_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_{32} \\ 0 \\ \sin \varphi_{32} \end{pmatrix}; \\
\mathbf{R}_3 &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_{31} & y_{31} & z_{31} \\ x_{32} & y_{32} & z_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & \cos \varphi_{31} & \sin \varphi_{31} \\ -\cos \varphi_{32} & 0 & \sin \varphi_{32} \end{pmatrix} = \\
&= i \cdot (-\cos \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32}) + j \cdot (\sin \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32}) + k \cdot (-\cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{3x} &= -\cos \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32}; \\
 r_{3y} &= \sin \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} \\
 r_{3z} &= -\cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32}.
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Задав координаты выходного звена точки $O(0,5; 0,5; 0,5)$ и длины звеньев $l_1=1; l_2=1, l_3=1$ координаты точки A_1 :

$$\begin{pmatrix} x_{A1} = l_3 + x_0 \\ y_{A1} = y_0 \\ z_{A1} = z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix},$$

согласно уравнениям (3.3), (3.7) углы поворота в параллелограммах равны:

$$\varphi_{11} = \arcsin \frac{z_{A1}}{l_1} = \arcsin \frac{0,5}{1} = 30^0;$$

$$\varphi_{12} = -\arcsin \frac{y_{A1}}{l_2} = -\arcsin \frac{0,5}{1} = -30^0;$$

$$\begin{aligned}
 q_1 &= x_{A1} + l_2 \cos\left(-\arcsin \frac{y_{A1}}{l_2}\right) + l_1 \cos\left(\arcsin \frac{z_{A1}}{l_1}\right) = \\
 &= 1,5 + 1 \cdot \cos(-30^0) + 1 \cdot \cos 30^0 = 3,232;
 \end{aligned}$$

координаты точки A_2 :

$$\begin{pmatrix} x_{A2} = x_0 \\ y_{A2} = l_3 + y_0 \\ z_{A2} = z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix};$$

$$\varphi_{21} = \arcsin \frac{x_{A2}}{l_1} = \arcsin \frac{0,5}{1} = 30^0;$$

$$\varphi_{22} = -\arcsin \frac{z_{A2}}{l_2} = -\arcsin \frac{0,5}{1} = -30^0;$$

$$\begin{aligned}
 q_2 &= y_{A2} + l_2 \cos\left(-\arcsin \frac{z_{A2}}{l_2}\right) + l_1 \cos\left(\arcsin \frac{x_{A2}}{l_1}\right) = \\
 &= 1,5 + 1 \cdot \cos(-30^0) + 1 \cdot \cos 30^0 = 3,232;
 \end{aligned}$$

координаты точки A_3 :

$$\begin{pmatrix} x_{A3} = x_0 \\ y_{A3} = y_0 \\ z_{A3} = l_3 + z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix};$$

$$\varphi_{31} = \arcsin \frac{y_{A3}}{l_1} = \arcsin \frac{0,5}{1} = 30^0;$$

$$\varphi_{32} = -\arcsin \frac{x_{A3}}{l_2} = -\arcsin \frac{0,5}{1} = -30^0;$$

$$\begin{aligned} q_3 &= z_{A3} + l_2 \cos \left(-\arcsin \frac{x_{A3}}{l_2} \right) + l_1 \cos \left(\arcsin \frac{y_{A3}}{l_1} \right) = \\ &= 1,5 + 1 \cdot \cos(-30^0) + 1 \cdot \cos 30^0 = 3,232. \end{aligned}$$

Пример решения прямой задачи о скоростях. Зададим скорости входных звеньев $V_{11} = -1$ м/с, $V_{21} = -1,5$ м/с, $V_{31} = -2$ м/с, тогда плюккеровы координаты силового винта будут равны согласно уравнениям (3.26), (3.27), (3.28):

$$r_{1x} = -\cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{11} = -\cos(-30^0) \cdot \cos 30^0 = -0,75;$$

$$r_{1y} = -\sin \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{11} = -\sin(-30^0) \cdot \cos 30^0 = -(-0,5) \cdot 0,866 = 0,432;$$

$$r_{1z} = \cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11} = \cos(-30^0) \cdot \sin 30^0 = 0,432;$$

$$r_{2x} = \cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{21} = \cos(-30^0) \cdot \sin 30^0 = 0,432;$$

$$r_{2y} = -\cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{22} = -\cos 30^0 \cdot \cos(-30^0) = -0,75;$$

$$r_{2z} = -\cos \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22} = \cos 30^0 \cdot \sin(-30^0) = 0,432;$$

$$r_{3x} = -\cos \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32} = -\cos 30^0 \cdot \sin(-30^0) = 0,432;$$

$$r_{3y} = \sin \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} = \sin 30^0 \cdot \cos(-30^0) = 0,432;$$

$$r_{3z} = -\cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} = -\cos 30^0 \cdot \cos(-30^0) = -0,750.$$

Подставив в уравнения (3.25) найденные значения плюккеровых координат силовых винтов, получаем систему уравнений скоростей манипулятора:

$$V_x \cdot (-0,750) + V_y \cdot 0,432 + V_z \cdot 0,432 = V_{11} \cdot (-0,75);$$

$$V_x \cdot 0,432 + V_y \cdot (-0,75) + V_z \cdot (-0,432) = V_{21} \cdot (-0,75);$$

$$V_x \cdot 0,432 + V_y \cdot (-0,432) + V_z \cdot (-0,75) = V_{31} \cdot (-0,75).$$

Для решения системы уравнений составляем матрицу из плюккеровых координат:

$$\begin{pmatrix} r_{1x} & r_{1y} & r_{1z} \\ r_{2x} & r_{2y} & r_{2z} \\ r_{3x} & r_{3y} & r_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,75 & 0,432 & 0,432 \\ 0,432 & -0,75 & 0,432 \\ 0,432 & 0,432 & -0,75 \end{pmatrix}$$

и, применяя правило Крамера, определяем значения скоростей выходного звена:

$$V_x = -10,013 \text{ м/с}, \quad V_y = -9,696 \text{ м/с}, \quad V_z = -9,379 \text{ м/с}.$$

Получено решение прямой задачи о скоростях методом винтового исчисления, расчеты совпадают с решением задачи с использованием уравнений связей.

3.3.3 Решение обратной задачи о скоростях методом винтового исчисления и определение особых положений.

Рассмотрим решение обратной задачи о скоростях. Линейная скорость выходного звена равна сумме линейных скоростей шарниров звеньев одной цепи. Задаём скорости выходного звена $V_x = -10,013 \text{ м/с}$, $V_y = -9,696 \text{ м/с}$, $V_z = -9,379 \text{ м/с}$ и составляем уравнения скоростей для первой кинематической цепи:

$$\begin{aligned} V_x &= V_{B1x} + V_{C1x} + V_{A1x}; \\ V_y &= V_{B1y} + V_{C1y} + V_{A1y}; \\ V_z &= V_{B1z} + V_{C1z} + V_{A1z}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

где V_{B1x} , V_{C1x} , V_{A1x} – проекции скоростей точек B_1 , C_1 , A_1 на оси x ; V_{B1y} , V_{C1y} , V_{A1y} – проекции скоростей точек B_1 , C_1 , A_1 на оси y ; V_{B1z} , V_{C1z} , V_{A1z} – проекции скоростей точек B_1 , C_1 , A_1 на оси z .

Подставив значения плюккеровых координат в уравнения (3.29), получаем:

$$\begin{aligned} V_x &= E_{11x} \cdot V_{B1} + E_{12x} \cdot V_{C1} + E_{13x} \cdot V_{A1}; \\ V_y &= E_{11y} \cdot V_{B1} + E_{12y} \cdot V_{C1} + E_{13y} \cdot V_{A1}; \\ V_z &= E_{11z} \cdot V_{B1} + E_{12z} \cdot V_{C1} + E_{13z} \cdot V_{A1}, \end{aligned}$$

где $E_{11x}, E_{11y}, E_{11z}$ – плюккеровы координаты единичного вектора; $E_{12x}, E_{12y}, E_{12z}$ – плюккеровы координаты единичного вектора, перпендикулярного плоскости, образованной вектором, расположенным вдоль оси промежуточного звена первого параллелограмма, и вектором направления оси вращения кинематической пары (оси параллельной oz); $E_{13x}, E_{13y}, E_{13z}$ – координаты единичного вектора, перпендикулярного плоскости образованной вектором, расположенным вдоль оси промежуточного звена второго параллелограмма, и вектором направления оси вращения кинематической пары (оси, параллельной ox).

Для второй кинематической пары уравнения скоростей имеют вид:

$$\begin{aligned} V_x &= V_{B2x} + V_{C2x} + V_{A2x}; \\ V_y &= V_{B2y} + V_{C2y} + V_{C2y}; \\ V_z &= V_{B2z} + V_{C2z} + V_{C2z}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где $V_{B2x}, V_{C2x}, V_{A2x}$ – проекции скоростей точек B_2, C_2, A_2 на оси x ; $V_{B2y}, V_{C2y}, V_{A2y}$ – проекции скоростей точек B_2, C_2, A_2 на оси y ; $V_{B2z}, V_{C2z}, V_{A2z}$ – проекции скоростей точек B_2, C_2, A_2 на оси z .

Подставляя значения плюккеровых координат в уравнения (3.30), получаем:

$$\begin{aligned} V_x &= E_{21x} \cdot V_{B2} + E_{22x} \cdot V_{C2} + E_{23x} \cdot V_{A2}; \\ V_y &= E_{21y} \cdot V_{B2} + E_{22y} \cdot V_{C2} + E_{23y} \cdot V_{C2}; \\ V_z &= E_{21z} \cdot V_{Bz} + E_{22z} \cdot V_{C2} + E_{23z} \cdot V_{C2}, \end{aligned}$$

где $E_{21x}, E_{21y}, E_{21z}$ – плюккеровы координаты единичного вектора, $E_{22x}, E_{22y}, E_{22z}$ – плюккеровы координаты единичного вектора, перпендикулярного плоскости, образованной вектором, расположенным вдоль оси промежуточного звена первого параллелограмма, и вектором направления оси вращения кинематической пары (оси параллельной oy); $E_{23x}, E_{23y}, E_{23z}$ – координаты единичного вектора, перпендикулярного плоскости, образованной вектором, расположенным вдоль оси промежуточного звена второго параллелограмма, и вектором направления оси вращения кинематической пары (оси, параллельной oz).

Для третьей кинематической пары уравнения скоростей имеет вид:

$$\begin{aligned}
 V_x &= V_{B3x} + V_{C3x} + V_{A3x}; \\
 V_y &= V_{B3y} + V_{C3y} + V_{A3y}; \\
 V_z &= V_{B3z} + V_{C3z} + V_{A3z},
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

где V_{B3x} , V_{C3x} , V_{A3x} – проекции скоростей точек B_3 , C_3 , A_3 на оси x ; V_{B3y} , V_{C3y} , V_{A3y} – проекции скоростей точек B_3 , C_3 , A_3 на оси y ; V_{B3z} , V_{C3z} , V_{A3z} – проекции скоростей точек B_3 , C_3 , A_3 на оси z .

Подставляя значения плюккеровых координат в уравнения (3.31), получаем:

$$\begin{aligned}
 V_x &= E_{31x} \cdot V_{B3} + E_{32x} \cdot V_{C3} + E_{33x} \cdot V_{A3}; \\
 V_y &= E_{31y} \cdot V_{B3} + E_{32y} \cdot V_{C3} + E_{33y} \cdot V_{A3}; \\
 V_z &= E_{31z} \cdot V_{B3} + E_{32z} \cdot V_{C3} + E_{33z} \cdot V_{A3},
 \end{aligned}$$

где E_{31x} , E_{31y} , E_{31z} – плюккеровы координаты единичного вектора, E_{32x} , E_{32y} , E_{32z} – плюккеровы координаты единичного вектора, перпендикулярного плоскости, образованной вектором, расположенным вдоль оси промежуточного звена первого параллелограмма, и вектором направления оси вращения кинематической пары (оси, параллельной ox); E_{33x} , E_{33y} , E_{33z} – координаты единичного вектора, перпендикулярного плоскости, образованной вектором, расположенным вдоль оси промежуточного звена второго параллелограмма, и вектором направления оси вращения кинематической пары (оси, параллельной oy).

Плюккеровы координаты, стоящие при скоростях, для первой кинематической цепи можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} E_{11x} & E_{12x} & E_{13x} \\ E_{11y} & E_{12y} & E_{13y} \\ E_{11z} & E_{12z} & E_{13z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \varphi_{11} & \sin \varphi_{12} \\ 0 & 0 & -\cos \varphi_{12} \\ 0 & \cos \varphi_{11} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,866 \\ 0 & 0,866 & 0 \end{pmatrix}.$$

Применяя правило Крамера, определяем скорости:

$$V_{B1} = 1 \text{ м/с}; V_{C1} = -10,83 \text{ м/с}; V_{A1} = -11,196 \text{ м/с}.$$

Плюккеровы координаты, стоящие при скоростях, для второй кинематической цепи можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} E_{21x} & E_{22x} & E_{23x} \\ E_{21y} & E_{22y} & E_{23y} \\ E_{21z} & E_{22z} & E_{23z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin \varphi_{21} & 0 \\ 1 & \cos \varphi_{21} & \sin \varphi_{12} \\ 0 & 0 & -\cos \varphi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,866 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,866 \end{pmatrix}.$$

Применяя правило Крамера, определяем скорости:

$$V_{B2}=1,5 \text{ м/с}; V_{C2}=11,562 \text{ м/с}; V_{A2} =17,505 \text{ м/с}.$$

Плюккеровы координаты, стоящие при скоростях, для третьей кинематической цепи можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} E_{31x} & E_{32x} & E_{33x} \\ E_{31y} & E_{32y} & E_{33y} \\ E_{31z} & E_{32z} & E_{33z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \varphi_{32} \\ 0 & \cos \varphi_{31} & 0 \\ 1 & \sin \varphi_{31} & -\sin \varphi_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,866 \\ 0 & 0,866 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Применяя правило Крамера, определяем скорости:

$$V_{B3}=2 \text{ м/с}; V_{C3}=17,498 \text{ м/с}; V_{A3} =-0,577 \text{ м/с}.$$

Для определения особых положений рассмотрим одну из кинематических цепей манипулятора, например первую цепь. Рассмотрим матрицу, составленную из плюккеровых координат кинематических винтов:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin \varphi_{11} & -\sin \varphi_{12} \\ 0 & 0 & \cos \varphi_{12} \\ 0 & \cos \varphi_{11} & 0 \end{pmatrix}.$$

Особое положение соответствует такому положению звеньев кинематической цепи, при котором матрица, составленная из плюккеровых координат, становится вырожденной, т.е. ее определитель равен нулю.

Определитель матрицы равен нулю при следующих значениях углов:

$$\varphi_{11} = 0^{\circ}, \varphi_{12} = 90^{\circ}; \quad \varphi_{11} = 0^{\circ}, \varphi_{12} = -90^{\circ}.$$

Такое положение соответствует сложенному параллелограмму.

Рассматривая механизм в целом, исследуем матрицу, составленную из плюккеровых координат силовых винтов из уравнения (3.25):

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} r_{1x} & r_{1y} & r_{1z} \\ r_{2x} & r_{2y} & r_{2z} \\ r_{3x} & r_{3y} & r_{3z} \end{pmatrix}.$$

Матрица вырождается при следующих значениях углов:

$$\varphi_{11} = 0^0; \quad \varphi_{12} = 0^0; \quad \varphi_{21} = 0^0; \quad \varphi_{22} = 0^0; \quad \varphi_{31} = 90^0; \quad \varphi_{32} = 0^0.$$

Таким образом, получено решение обратной задачи о скоростях методом винтового исчисления, расчеты совпадают с решением задачи с использованием уравнений связей. А также используя аппарат винтового исчисления, определены особые положения механизма.

3.3.4 Решение задачи об ускорении

Дифференцируя уравнения связей $F(x_0, y_0, z_0, q_i) = 0$, по t , получаем систему уравнений, связывающие скорости входных и выходных звеньев :

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial F_i}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0 \quad i=1, 2, 3$$

Дифференцируя уравнения связей второй раз по t , получаем кинематические уравнения, связывающие ускорения входных и выходных звеньев [124]:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} \dot{x} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial z} \dot{z} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial q_i} \dot{q}_i \right) \dot{x} + \frac{\partial F_i}{\partial x} \ddot{x} + \\ & + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial y} \dot{x} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2} \dot{y} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial y \partial z} \dot{z} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial y \partial q_i} \dot{q}_i \right) \dot{y} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \ddot{y} + \\ & \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial z} \dot{x} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial y \partial z} \dot{y} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial z^2} \dot{z} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial z \partial q_i} \dot{q}_i \right) \dot{z} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \ddot{z} + \\ & + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial q_i} \dot{x} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial y \partial q_i} \dot{y} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial z \partial q_i} \dot{z} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial q_i^2} \dot{q}_i \right) \dot{q}_i + \frac{\partial F_i}{\partial q_i} \ddot{q}_i \end{aligned} \quad (3.32)$$

Упростив полученное выражение, получаем значения частных производных для первой цепи:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \dot{x}^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} \dot{x} \dot{z} + 2 \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial q_1} \dot{x} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} \dot{y}^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} \dot{y} \dot{z} + \\ & + 2 \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial q_1} \dot{y} \dot{q}_1 + 2 \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial q_1} \dot{z} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \dot{z}^2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_1^2} \dot{q}_1^2 + \frac{\partial F_1}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \ddot{y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \ddot{z} + \frac{\partial F_1}{\partial q_1} \ddot{q}_1 \end{aligned}$$

Для решения задачи об ускорении введем следующие замены:

$$a = \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{l_2^2}}; \quad b = \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{l_1^2}}; \quad c = \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{l_1^2}},$$

$$\text{где } \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} = 0; \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial q_1} = 0; \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial q_1} = 0; \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} = 0; \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial q_1} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_1^2} = 0; \frac{\partial F_1}{\partial x} = -1; \frac{\partial F_1}{\partial q_1} = 1; \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{y_0}{l_2 \cdot a}; \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{z_0}{l_1 \cdot b}; \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = \frac{1}{l_1 \cdot b} + \frac{z_0^2}{l_1^3 \cdot b^3};$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = \frac{1}{l_2 \cdot a} + \frac{y_0^2}{l_2^3 \cdot a^3}.$$

Значения частных производных для второй цепи:

$$\text{где } \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} = 0; \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial q_2} = 0; \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = 0; \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial q_2} = 0; \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} = 0; \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial q_2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_2^2} = 0; \frac{\partial F_2}{\partial y} = -1; \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = 1; \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x_0}{l_1 \cdot c}; \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{z_0}{l_2 \cdot c}; \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = \frac{1}{l_1 \cdot c} + \frac{x_0^2}{l_1^3 \cdot c^3};$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} = \frac{1}{l_2 \cdot b} + \frac{z_0^2}{l_2^3 \cdot b^3}.$$

Значения частных производных для третьей цепи:

$$\text{где } \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} = 0; \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial q_3} = 0; \frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial q_3} = 0; \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z} = 0; \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial q_3} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} = 0; \frac{\partial^2 F_3}{\partial q_3^2} = 0; \frac{\partial F_3}{\partial z} = -1; \frac{\partial F_3}{\partial q_3} = 1; \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{x_0}{l_2 \cdot c}; \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{y_0}{l_1 \cdot a}; \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} = \frac{1}{l_2 \cdot c} + \frac{x_0^2}{l_2^3 \cdot c^3}$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} = \frac{1}{l_1 \cdot a} + \frac{y_0^2}{l_1^3 \cdot a^3}.$$

Уравнения ускорений (3.32) можно записать в следующем виде, принимая

$$l = l_1 = l_2:$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= \ddot{x} - \left(\frac{y_0}{l \cdot a} \right) \cdot \ddot{y} - \left(\frac{z_0}{l \cdot b} \right) \cdot \ddot{z} - \left(\frac{1}{l \cdot b} + \frac{z_0^2}{l^3 \cdot b^3} \right) \cdot \dot{z}^2 - \left(\frac{1}{l \cdot a} + \frac{y_0^2}{l^3 \cdot a^3} \right) \cdot \dot{y}^2 \\ \ddot{q}_2 &= \ddot{y} - \left(\frac{z_0}{l \cdot b} \right) \cdot \ddot{z} - \left(\frac{x_0}{l \cdot c} \right) \cdot \ddot{x} - \left(\frac{1}{l \cdot b} + \frac{z_0^2}{l^3 \cdot b^3} \right) \cdot \dot{z}^2 - \left(\frac{1}{l \cdot c} + \frac{x_0^2}{l^3 \cdot c^3} \right) \cdot \dot{x}^2 \\ \ddot{q}_3 &= \ddot{z} - \left(\frac{y_0}{l \cdot a} \right) \cdot \ddot{y} - \left(\frac{x_0}{l \cdot c} \right) \cdot \ddot{x} - \left(\frac{1}{l \cdot c} + \frac{x_0^2}{l^3 \cdot c^3} \right) \cdot \dot{x}^2 - \left(\frac{1}{l \cdot a} + \frac{y_0^2}{l^3 \cdot a^3} \right) \cdot \dot{y}^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Для решения задачи ускорения в приводах зададим уравнение движения выходного звена: $x = 1 - \cos(t)$; $y = 2 - 2 \cdot \cos(t)$; $z = 3 - 3 \cdot \cos(t)$.

Это прямолинейное движение выходного звена, причем в начальный момент времени $t=0$ и конечный момент времени $t=\pi$ его остановка. Такой закон движения соответствует технологической операции, например, погрузка-выгрузка, съем-укладка.

Подставив исходные уравнения движения выходного звена, получаем значения ускорений в приводах (рис.3.13).

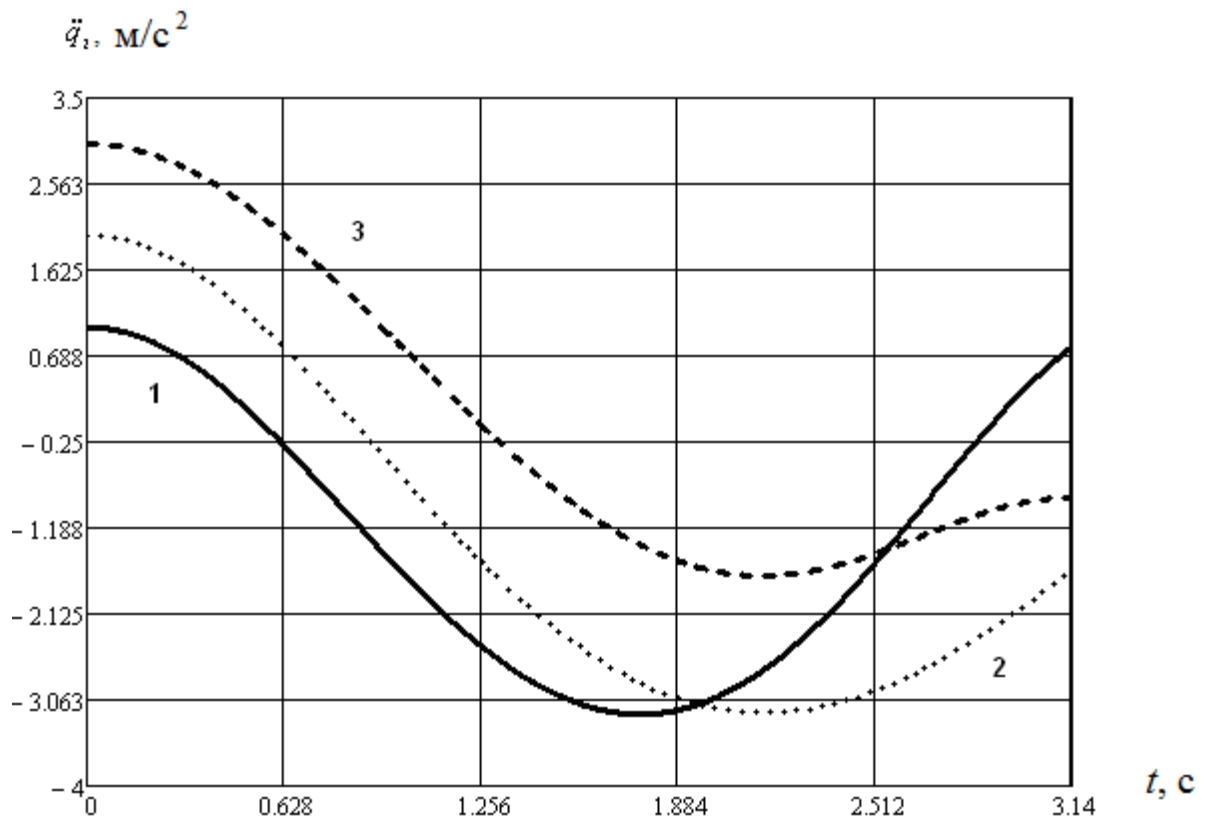


Рис. 3.13 График изменения ускорений в приводах

- 1 – ускорение в приводе 1-й цепи,**
- 2 – ускорение в приводе 2-й цепи,**
- 3 – ускорение в приводе 3-й цепи**

Таким образом, полученные уравнения ускорений в дальнейшем можно использовать для решения задач динамики и управления.

3.4. Кинематическая точность поступательно-направляющего механизма

Применение промышленных роботов определяется точностью воспроизведения движения исполнительного органа и позиционирования [16, 17]. Погрешность позиционирования зависит от многих системных и случайных составляющих. К системным относят отклонения звеньев от номинальной длины, неточность работы системы управления. Системные погрешности могут быть учтены или скомпенсированы полностью или частично. В параграфе рассмотрено влияние отклонения линейных размеров звеньев от заданных.

Решение задачи о положении определяет взаимосвязь между входными и выходными координатами.

В общем виде задача о положении задается в виде неявных функций:

$$F_i = (L_{i1}, L_{i2}, L_{i3}, x, y, z, q_i) \quad (3.34)$$

Полный дифференциал функции (3.34) можно записать в виде:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F_i}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_i}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F_i}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F_i}{\partial L_{i1}} \delta L_{i1} + \frac{\partial F_i}{\partial L_{i2}} \delta L_{i2} + \frac{\partial F_i}{\partial L_{i3}} \delta L_{i3} = 0 \quad (3.35)$$

где L_{i1}, L_{i2}, L_{i3} – длины звеньев i -й цепи.

Согласно линейной теории точности приращение в приводах равны нулю $\delta q_1 = 0, \delta q_2 = 0, \delta q_3 = 0$. Тогда уравнения для трех кинематических цепей (3.35)

можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_1}{\partial z} \delta z &= - \left(\frac{\partial F_1}{\partial L_{11}} \delta L_{11} + \frac{\partial F_1}{\partial L_{12}} \delta L_{12} + \frac{\partial F_1}{\partial L_{13}} \delta L_{13} \right); \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_2}{\partial z} \delta z &= - \left(\frac{\partial F_2}{\partial L_{21}} \delta L_{21} + \frac{\partial F_2}{\partial L_{22}} \delta L_{22} + \frac{\partial F_2}{\partial L_{23}} \delta L_{23} \right); \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F_3}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_3}{\partial z} \delta z &= - \left(\frac{\partial F_3}{\partial L_{31}} \delta L_{31} + \frac{\partial F_3}{\partial L_{32}} \delta L_{32} + \frac{\partial F_3}{\partial L_{33}} \delta L_{33} \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Частые производные будут равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial L_{31}} &= -1; \quad \frac{\partial F_2}{\partial L_{33}} = -1; \quad \frac{\partial F_3}{\partial L_{32}} = -1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial L_{12}} = -\sqrt{1 - \frac{1}{L_{12}^2} \cdot y^2} - \frac{y^2}{L_{12}^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{L_{12}^2}}}; \\ \frac{\partial F_2}{\partial L_{22}} &= -\sqrt{1 - \frac{1}{L_{22}^2} \cdot z^2} - \frac{z^2}{L_{22}^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{z^2}{L_{22}^2}}}; \quad \frac{\partial F_3}{\partial L_{32}} = -\sqrt{1 - \frac{1}{L_{32}^2} \cdot x^2} - \frac{x^2}{L_{32}^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{L_{32}^2}}}; \\ \frac{\partial F_1}{\partial L_{11}} &= -\sqrt{1 - \frac{1}{L_{11}^2} \cdot z^2} - \frac{z^2}{L_{11}^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{z^2}{L_{11}^2}}}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial L_{21}} = -\sqrt{1 - \frac{1}{L_{21}^2} \cdot x^2} - \frac{x^2}{L_{21}^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{L_{21}^2}}}; \\ \frac{\partial F_3}{\partial L_{31}} &= -\sqrt{1 - \frac{1}{L_{31}^2} \cdot y^2} - \frac{y^2}{L_{31}^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{L_{31}^2}}}. \end{aligned}$$

Выразим из уравнения (3.35) приращения δx , δy , δz :

$$\begin{aligned} \delta x &= -\frac{A \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial F_3}{\partial z} - B \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_3}{\partial z} + C \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial z} - C \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial y} - A \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial y} + B \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial y}}{\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial F_3}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial y}} \\ \delta y &= -\frac{B \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_3}{\partial x} - C \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial y} - A \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial x} + C \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial z} + A \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial F_3}{\partial z} - B \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial z}}{\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial F_3}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial y}} \\ \delta z &= -\frac{C \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} - B \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_3}{\partial y} - C \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial z} - A \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_3}{\partial z} + B \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial F_3}{\partial z} + A \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial y}}{\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial y} \frac{\partial F_3}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial x} \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial y}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

где $A = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial L_{11}} \delta L_{11} + \frac{\partial F_1}{\partial L_{12}} \delta L_{12} + \frac{\partial F_1}{\partial L_{13}} \delta L_{13} \right)$; $B = -\left(\frac{\partial F_2}{\partial L_{21}} \delta L_{21} + \frac{\partial F_2}{\partial L_{22}} \delta L_{22} + \frac{\partial F_2}{\partial L_{23}} \delta L_{23} \right)$

$C = -\left(\frac{\partial F_3}{\partial L_{31}} \delta L_{31} + \frac{\partial F_3}{\partial L_{32}} \delta L_{32} + \frac{\partial F_3}{\partial L_{33}} \delta L_{33} \right)$.

Рассмотрим пример идеального механизма с длинами звеньев $L_{11} = L_{12} = L_{21} = L_{22} = L_{31} = L_{32} = 200$ мм, $L_{13} = L_{23} = L_{33} = 100$ мм, координаты выходного звена в начальном положении (0; 0; 0), а отклонения длины звеньев

$\delta L_1^I = 0,1$ мм, $\delta L_2^I = 0,1$ мм, $\delta L_3^I = 0$ мм. Отклонения выходного звена δx , δy , δz определяется формулой (3.37), общее отклонение Δ равно:

$$\Delta = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2} = 0,345 \text{ мм}.$$

Для исследования ошибок положения выберем несколько точек в рабочей зоне.

Значения отклонения входного звена представлено в таблице 3.1.

Таблица 3.1.

Значения отклонений выходного звена, рассчитанное
на основе линейной теории точности

Координаты выходного звена, x, y, z , мм	δx , мм	δy , мм	δz , мм	Общее отклонение, Δ , мм
0; 0; 0	-0,2	-0,2	-0,2	0,345
20; 40; 0	-0,248	-0,2254	-0,2735	0,4326
198; 140; 120	0,1244	0,2164	0,2363	0,3438
170; 180; 130	0,1837	0,1696	0,2274	0,3380
100; 120; 130	0,6071	0,5532	0,5251	0,9750
170; 180; 180	0,1608	0,1500	0,1500	0,2262
50; 80; -30	0,2469	-0,2122	-0,3687	0,4919

Механизмы параллельной структуры являются многозвенными, с взаимовлиянием приводов, что усложняет решение задачи, связанной с оценкой точности функционирования роботов. При определении ошибок скорости использование линейной теории точности возможно в условиях малых перемещений, что ограничивает круг задач. Это заставляет исследовать механизмы в рамках нелинейной теории точности. Для проверки применимости линейной теории точности сравним результаты расчетов с фактическим отклонением.

Зависимости между входными и выходными координатами можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= f(L_1, L_2, L_3, q_1, q_2, q_3); \\
 y_0 &= f(L_1, L_2, L_3, q_1, q_2, q_3), \\
 z_0 &= f(L_1, L_2, L_3, q_1, q_2, q_3)
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

где x_0, y_0, z_0 – значения координат выходного звена идеального механизма, рассчитываемые из задачи о положении.

Тогда фактическое отклонение можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 x_i &= f(L_1 + \Delta L_{i1}, L_2 + \Delta L_{i2}, L_3 + \Delta L_{i3}, q_1, q_2, q_3); \\
 y_i &= f(L_1 + \Delta L_{i1}, L_2 + \Delta L_{i2}, L_3 + \Delta L_{i3}, q_1, q_2, q_3); \\
 z_i &= f(L_1 + \Delta L_{i1}, L_2 + \Delta L_{i2}, L_3 + \Delta L_{i3}, q_1, q_2, q_3).
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

где x_i, y_i, z_i – значения координат выходного звена при наличии отклонений в длинах звеньев механизма.

Разность уравнений (3.38), (3.37) характеризует общую ошибку положения:

$$\Delta x = x_i - x_0; \Delta y = y_i - y_0; \Delta z = z_i - z_0$$

Расчеты по определению фактической ошибки положения координат представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2.

Значения отклонений выходного звена, рассчитанное на основе нелинейной теории точности

Координаты выходного звена, мм x, y, z	$\Delta x, \text{мм}$	$\Delta y, \text{мм}$	$\Delta z, \text{мм}$	Общее отклонение, мм	Отклонение от линейной зависимости, %
0; 0; 0	-0,2	-0,2	-0,2	0,345	0
20; 40; 0	0,2476	0,2250	0,273	0,4319	0,16
198; 140; 120	0,1243	0,2162	0,236	0,3434	0,12
170; 180; 130	0,1835	0,1694	0,227	0,3376	0,12
100; 120; 130	0,6020	0,5480	0,5205	0,9663	0,89
170; 180; 180	0,1607	0,1499	0,149	0,2261	0
50; 80; -30	0,2462	0, 2116	0, 367	0, 4907	0,25

Как видно из таблицы 7.2. ошибка положения выходного звена, полученная с использованием линейной теории точности, совпадает с результатами, полученными с расчетами, основанными на нелинейной теории точности. Отклонение не превышает более 1%.

Выводы по главе 3

1. Проведен структурно-параметрический синтез поступательно-направляющих механизмов с тремя степенями свободы с использованием структурных формул. Показано, что в основе построения таких механизмов лежит две концепции синтеза – либо каждая цепь налагает одинаковые связи, либо каждая цепь налагает по одной связи (момент). Приведены примеры построения цепей с различным числом кинематических пар. На основе предложенных кинематических цепей синтезированы механизмы.
2. Синтезирован новый поступательно-направляющий механизм с тремя кинематическими цепями, содержащими по два шарнирных параллелограмма, получены уравнения связей.
3. Решены прямые и обратные задачи о положении, о скоростях, об ускорениях, определены особые положения на основе уравнения связей и винтовом исчислении. Показана применимость двух методов решения.
4. Исследованы вопросы геометрической точности механизма с применением линейной теории точности. Сопоставлены результаты расчетов, полученные с применением нелинейной точности. Показано совпадение результатов.
5. Определена рабочая зона механизма на основе задачи о положении, что позволяет оценить габариты манипулятора, для установки его в производственных помещениях.

ГЛАВА 4. СИНТЕЗ И АНАЛИЗ СФЕРИЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

В главе рассматриваются вопросы структурно-параметрического синтеза. Структурно-параметрический синтез проводится на основе структурных формул. Решены задачи кинематического анализа для нескольких сферических механизмов. В частности, решены задачи о положении, о скоростях, ускорениях, определены особые положения. Кинематический анализ проводится на основе связей, налагаемых кинематическими цепями, а также на основе винтового исчисления. Исследованы вопросы кинематической точности механизма.

4.1. Синтез сферических механизмов.

В параграфе рассмотрен структурно-параметрический синтез сферических механизмов с тремя степенями свободы с тремя кинематическими цепями. Задача осуществления передачи движения между взаимопересекающимися осями может быть решена с использованием сферических манипуляторов. Такие манипуляторы применяются в устройствах для ориентирования антенн, телескопов, в испытательных стендах, для обработки сферических поверхностей, в смесителях, тестомесильных машинах, в устройствах для оформления кондитерских изделий. Манипуляторы, выполняющие сферические движения, могут быть построены на основе различных конструктивных решений, однако все они обладают одним свойством – их можно представить схемами, в которых оси входных и выходных кинематических пар пересекаются в одной точке.

Сферические механизмы строятся по принципам, когда каждая кинематическая цепь налагает одинаковые связи либо каждая цепь налагает по одной связи – момент.

Кинематическая цепь может содержать:

- три вращательные пары, налагающие по три связи: RRR, RU (рис.4.1)

- пять вращательных пар, налагающих по одной связи: RRRRR, URU
(рис.4.2)

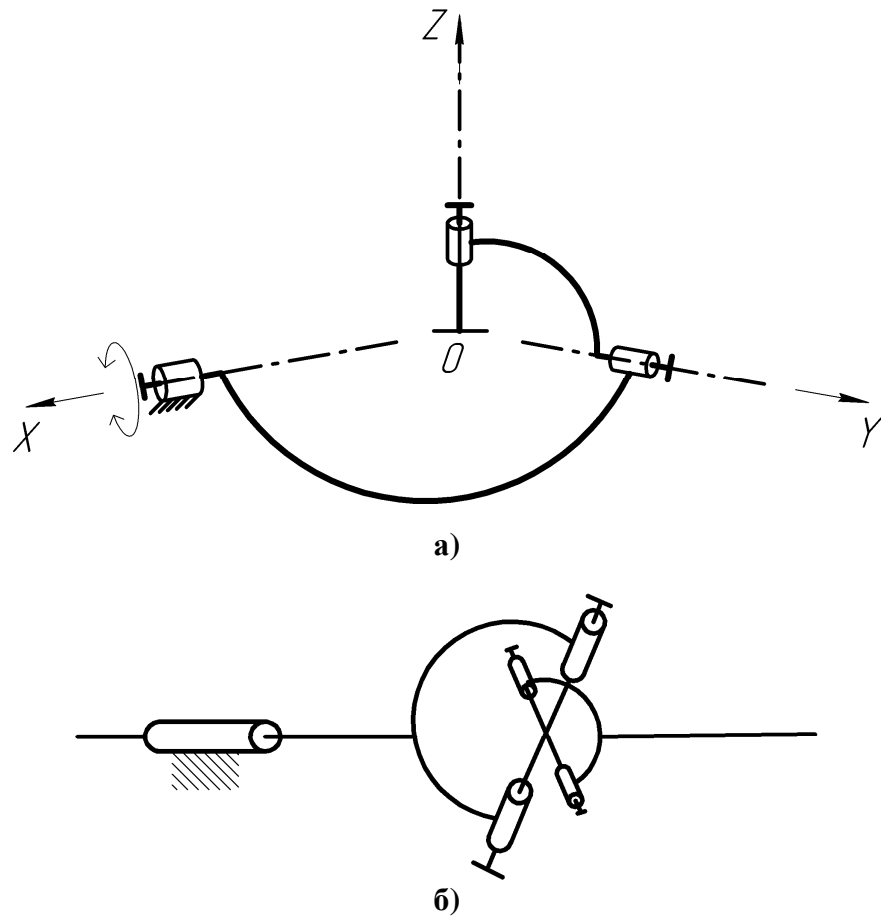
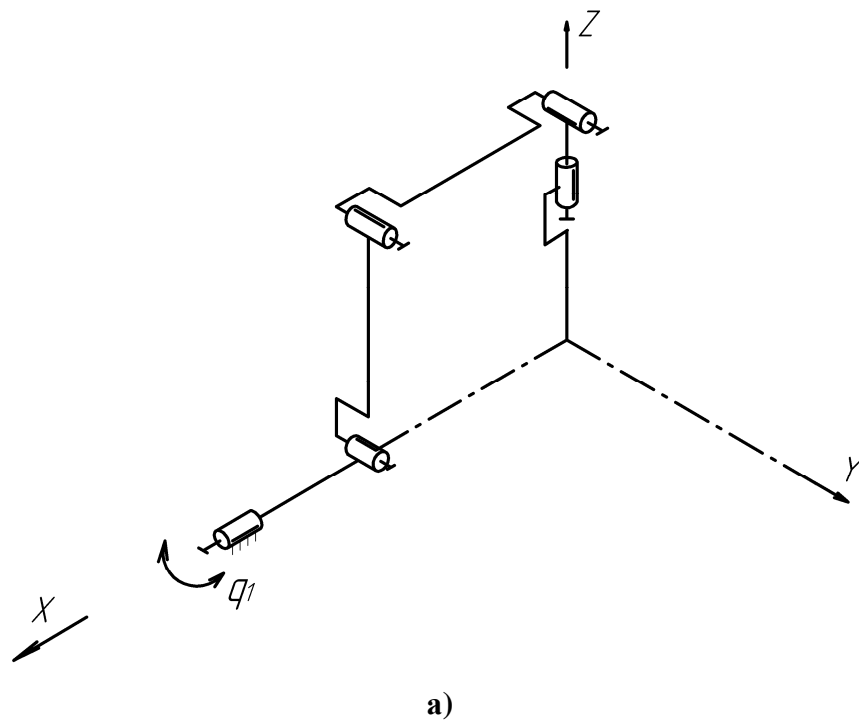


Рис. 4.1 Кинематическая цепь с тремя вращательными парами с пересекающимися осями
а – RRR, б – RU



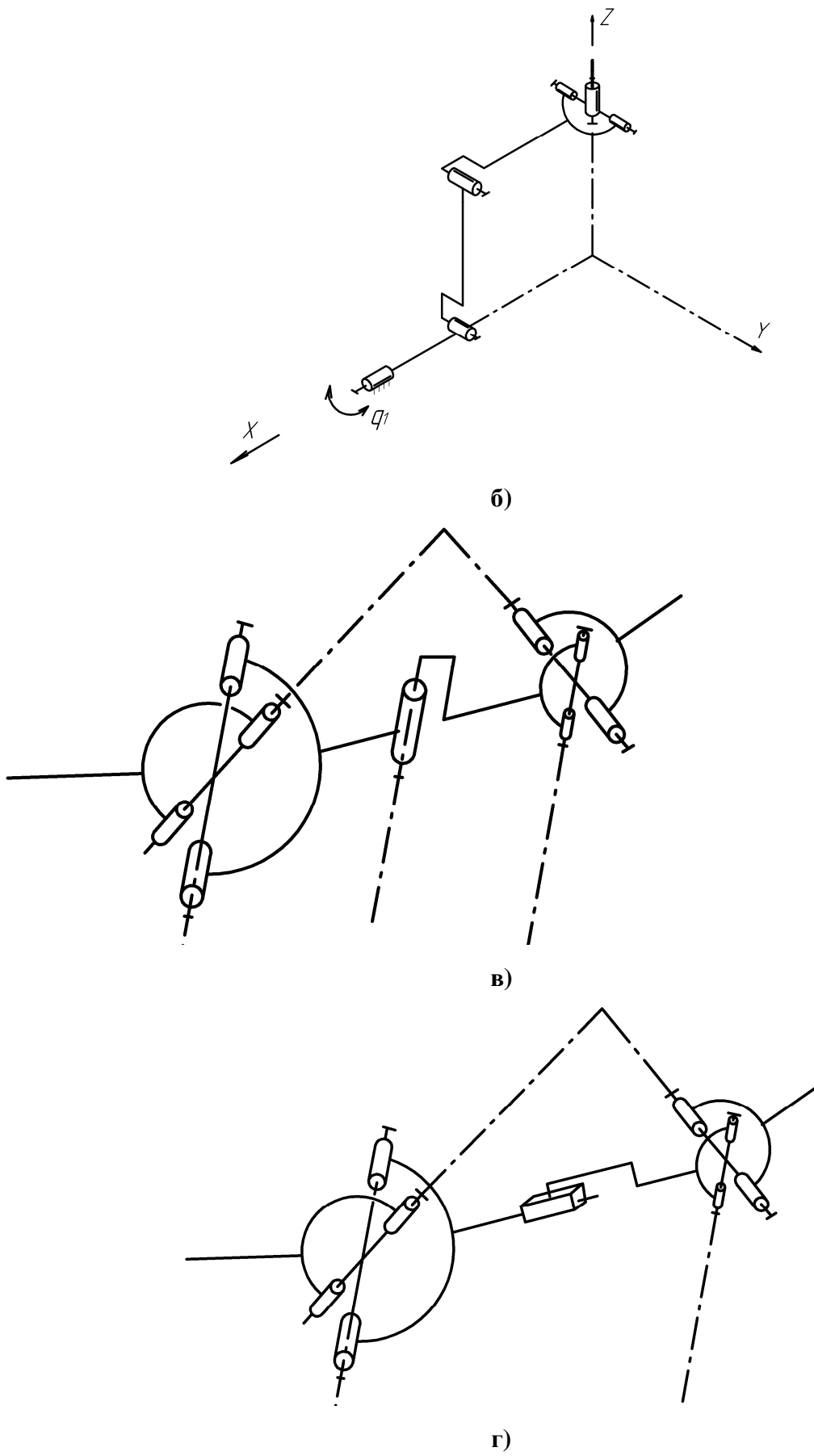


Рис. 4.2 Кинематическая цепь с пятью парами
 а – RRRRR, б – RRRU, в – URU, г – UPU

Рассмотрим механизм с тремя цепями, содержащими по три вращательные пары (рис.4.3). Этот механизм состоит из трех кинематических цепей с пересекающимися осями пар. Оси вращательных пар пересекаются в одной точке – начале координат под углом 90° . Выходное звено представляет собой вращающуюся вокруг трех осей платформу. Каждое входное звено цепи соединено с вращательным двигателем. В этом механизме каждая цепь налагает по три одинаковых связи.

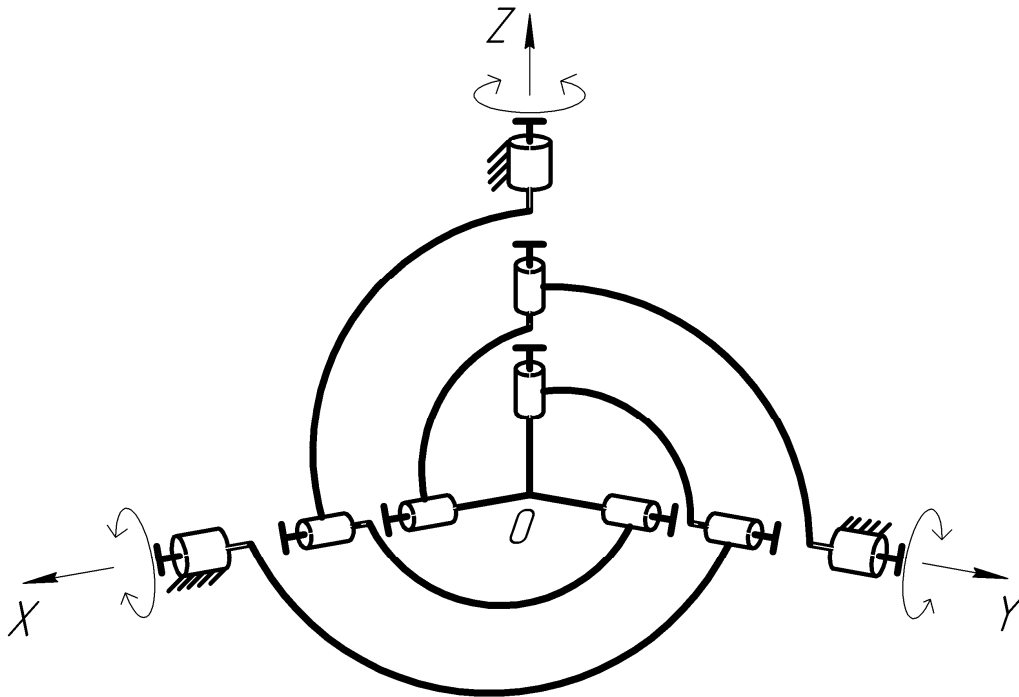


Рис.4.3 Сферический механизм 3RRR

Согласно формуле Сомова – Малышева число степеней W свободы механизма для пространственной кинематической структуры определяется следующим образом:

$$W = 6 \cdot (n - 1) - 5 \cdot p_5 = 6 \cdot (8 - 1) - 5 \cdot 9 = 3 \quad (4.1)$$

Применение этой формулы возможно в том случае, если на движения звеньев, входящих в состав механизма, не наложено каких-либо дополнительных условий (оси всех вращательных пар были параллельны, пересекались в одной точке и т.д.). Эти дополнительные требования изменяют характер движений механизма и соответственно изменяют вид его структурной формулы.

В сферическом механизме все три кинематические цепи налагают одинаковые связи и оси всех пар пересекаются в одной точке. Имеются три силовых винта и взаимные им три кинематические. Это винты нулевого параметра. Для определения числа степеней свободы применим формулу Добровольского:

$$W = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot p_5 - p_4 = 3 \cdot (8 - 1) - 2 \cdot 9 = 3 \quad (4.2)$$

Если последние вращательные пары заменить сферическими, то в этом случае каждая цепь налагает по одной связи (рис.4.4.). Число степеней свободы определим по формуле Сомова-Малышева:

$$W = 6 \cdot (n - 1) - 5 \cdot p_5 - 4 \cdot p_4 - 3 \cdot p_3 = 6 \cdot (8 - 1) - 5 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 3$$

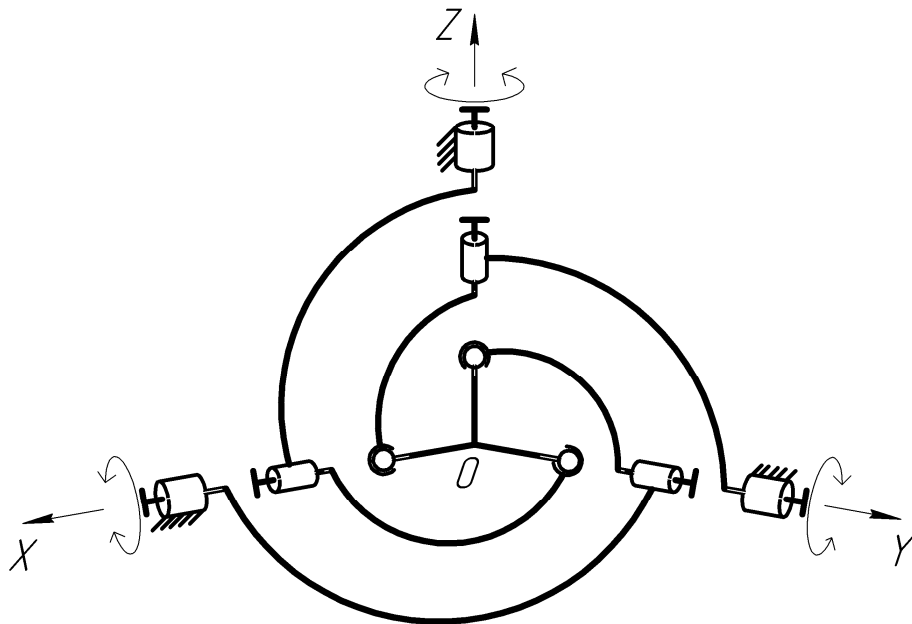


Рис.4.4 Сферический механизм 3RRS

Сферический механизм, построенный по принципу отбора каждой цепью по одной степени свободы. Эта степень свободы является поступательным движением (рис. 4.5).

В этом механизме начальная вращательная кинематическая пара, расположена перпендикулярно оси двигателя, а две промежуточные вращательные пары, расположены параллельно оси начальной пары. Конечная вращательная пара, расположена перпендикулярно оси второй промежуточной пары и сопряжена с выходным звеном.

Так как на движение не наложено дополнительных условий, то число степеней свободы можно определить по формуле (4.1), соответствующей пространственному механизму:

$$W = 6 \cdot (n - 1) - 5 \cdot p_5 = 6 \cdot (14 - 1) - 5 \cdot 15 = 3$$

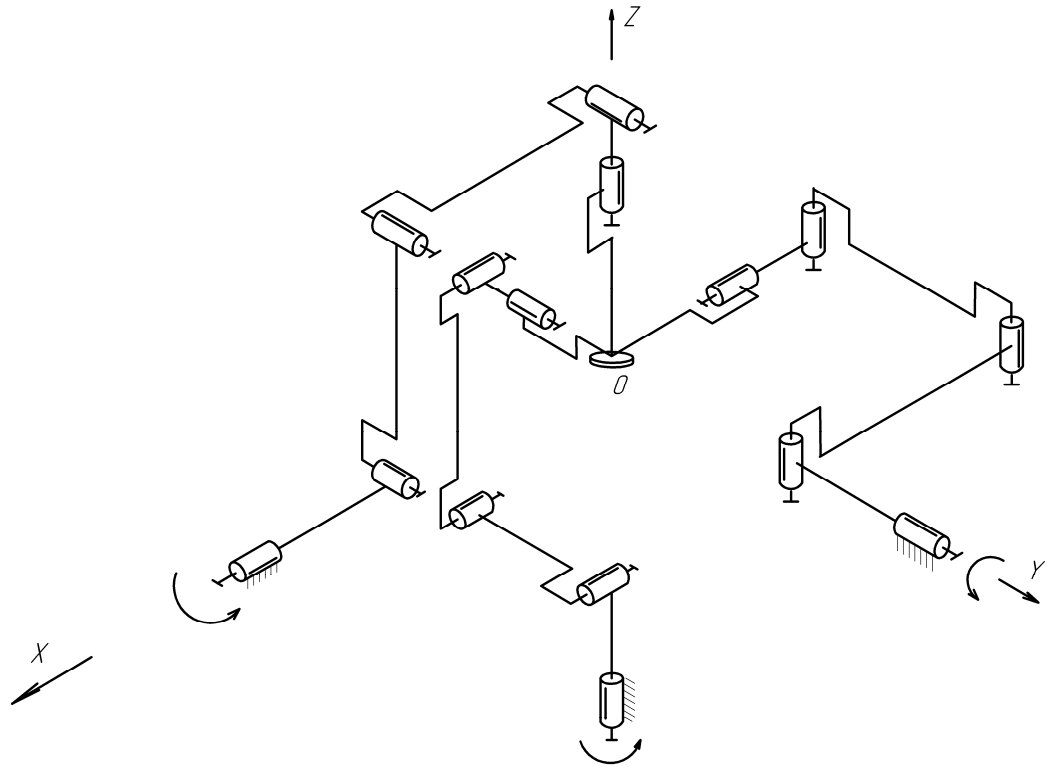


Рис. 4.5. Сферический механизм 3RRRRR

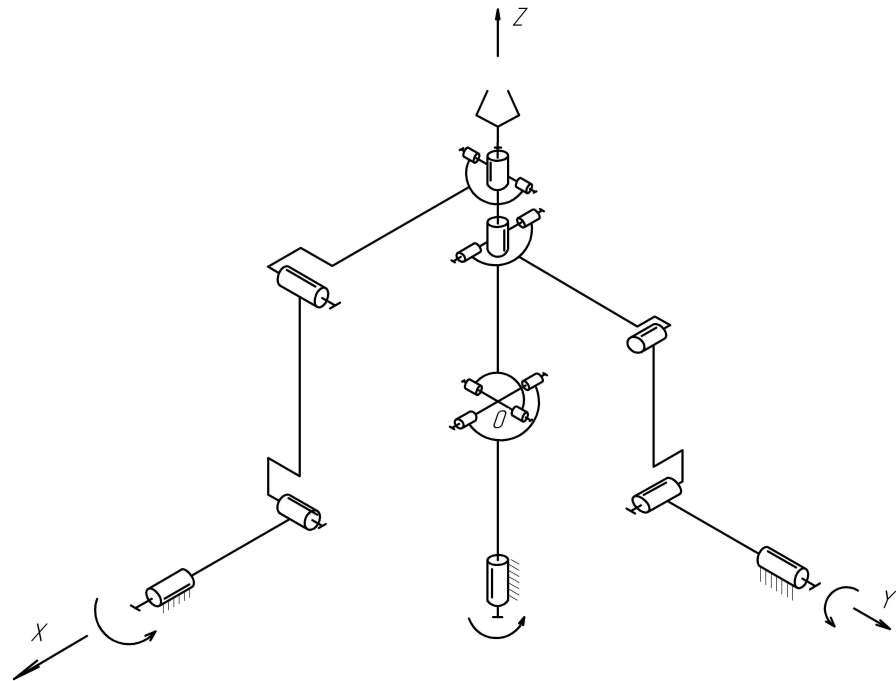
Применение разных формул по определению числа степеней свободы можно объяснить на основе замкнутых групп винтов. Пусть выходное звено соединено с основанием кинематической цепью, в которой кинематические пары расположены таким образом, что кинематические винты, определяемые соответствующей парой, образуют замкнутую группу винтов. Соединение выходного звена и основания другой кинематической цепью, винты которой входят в ту же группу винтов, подвижности не изменят. Замкнутые группы винтов могут быть одно-, двух-, трех-, четырех- и шестичленные группы. Шестичленной группе соответствует общая формула Сомова – Малышева.

К трехчленной группе винтов относят винты с параметром $p=0$, оси которых пересекаются в одной точке, что соответствует сферическим механизмам (рис.4.3).

Для построения механизмов, в которых выходное звено совершает движения, соответствующие трехчленной группе винтов, используется формула, соответствующая плоским механизмам. При проектировании механизмов параллельной структуры присоединение другой цепи, соответствующей той же группе винтов, не изменит числа степеней свободы. Если присоединяемая группа содержит меньшее число винтов, то число степеней свободы уменьшится.

Сферический механизм (рис 4.6) обладает частичной развязкой. Первая и вторая цепь, у которых оси приводных вращательных пар расположены вдоль осей x и y , налагают по одной связи (P_{22}, P_{33}).

Две цепи, у которых входные звенья расположены вдоль осей x и y . Эти две кинематические цепи налагают по одной связи.



**Рис.4.6 Сферический механизм с тремя кинематическими цепями
2RRRU, RU**

Применим формулу для определения числа степеней свободы:

$$W = 6 - \sum_{i=1}^2 (6 - p_{si}) \quad (4.3)$$

Таким образом, число степеней свободы будет равно:

$$W = 6 - (6 - 5) - (6 - 5) = 4$$

Первая и вторая кинематические цепи имеют четыре степени свободы. Третья цепь, входная ось которой расположена вдоль оси z , отбирает три движения – поступательные. Применим для расчета формулу (4.3):

$$W = 6 - (6 - 3) = 3$$

Выходное звено соединено с основанием кинематической цепью, в которой кинематические пары расположены таким образом, что кинематические винты, определяемые соответствующей парой, образуют замкнутую трехчленную группу винтов с параметром $p=0$. Также, для определения числа степеней свободы третьей кинематической цепи можно применить формулу (4.2):

$$W = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot p_5 - p_4 = 3 \cdot (4 - 1) - 2 \cdot 3 = 3$$

Третья цепь отбирает те же 2 движения (т.е. налагает такие же связи P_{11} , P_{12}), что и первые две цепи (рис.4.7). Три вектора выходят из одной точки и имеется трехчленная группа винтов, остальные два вектора описываются той же трехчленной группой винтов. Связи являются повторяющимися. Поэтому механизм обладает тремя степенями свободы.

Рассмотрим сферические механизмы 3URU, 3UPU построенные по принципу наложения каждой цепью по одной связи (рис. 4.8)

Для определения числа степеней свободы применим формулу (4.3):

$$W = 6 - (6 - 5) - (6 - 5) - (6 - 5) = 3$$

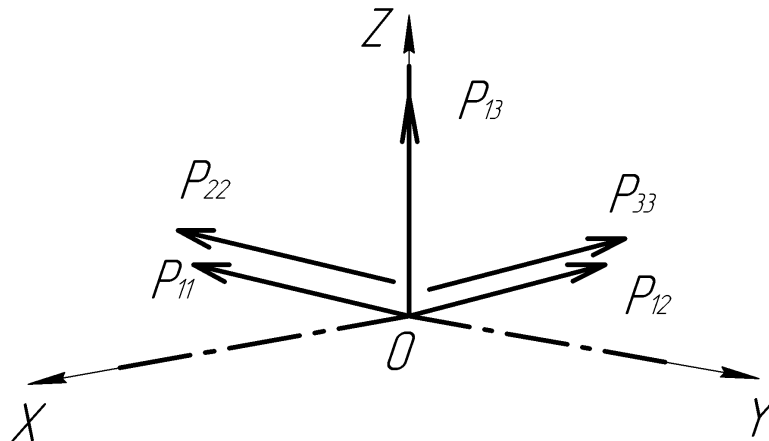


Рис.4.7. Связи, налагаемые кинематическими цепями

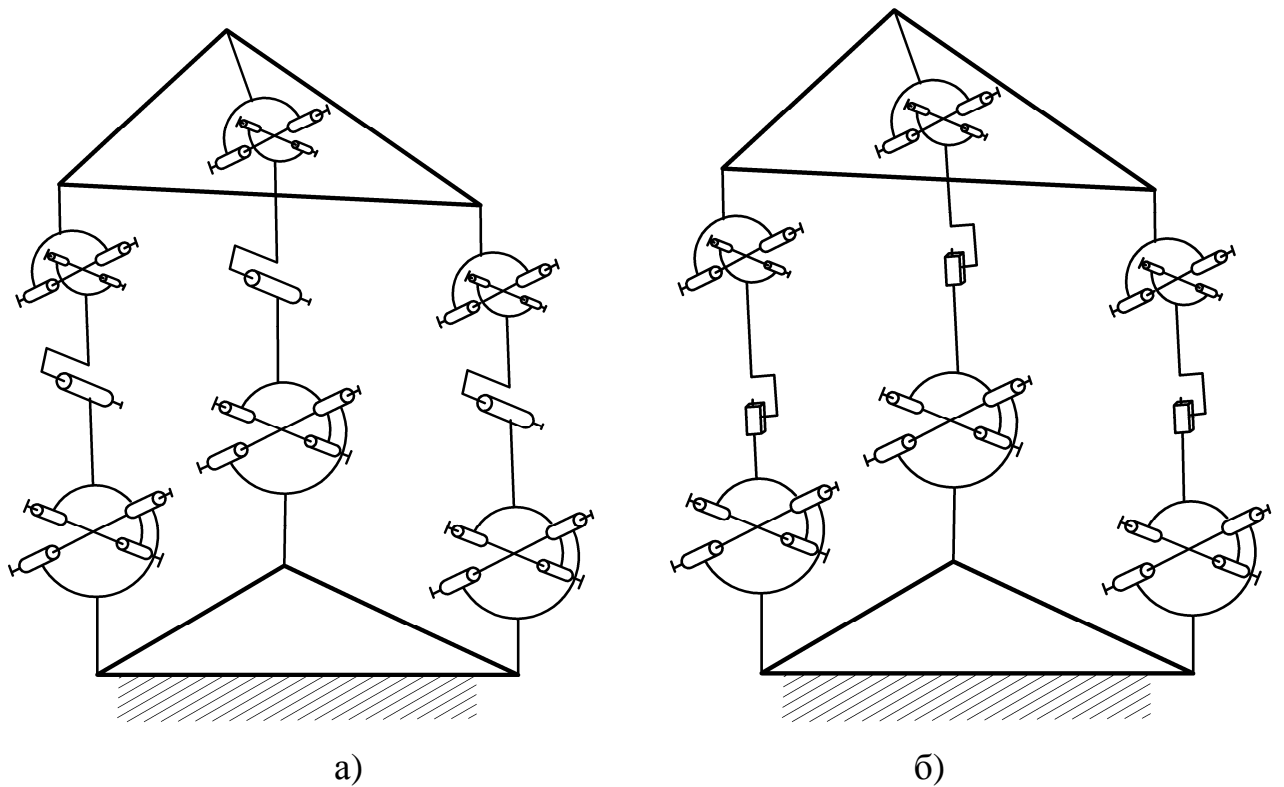


Рис.4.8. Сферический механизм

а – 3URU, б – 3UPU

Механизм с четырьмя цепями состоит из трех приводных цепей и одной цепи содержащей сферическую пару (рис. 4.9). Сферическая пара может быть заменена тремя парами, оси которых пересекаются. Все связи налагаются одной цепью, а три другие являются приводными.

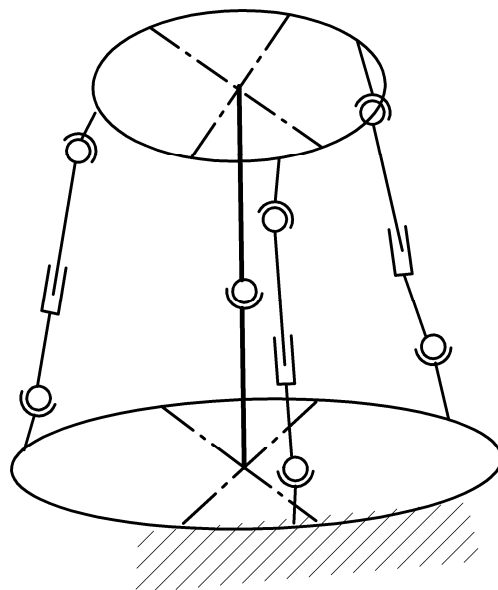


Рис.4.9. Сферический механизм с четырьмя цепями 1S, 3SPS

Таким образом, показаны кинематические цепи сферических механизмов, кинематические схемы механизмов, принципы их построения. Показана применимость формул определения числа степеней свободы, используя принцип наложения связей и винтовое исчисление.

4.2. Решение задачи о положении

Рассмотрим сферический манипулятор, в котором оси вращательных пар пересекаются в одной точке – начале координат под углом 90° (рис.4.10) [83, 114]. Каждое входное звено цепи соединено с вращательным двигателем. Выходное звено представляет собой платформу, вращающуюся в точке O вокруг трех осей координат. Выходными координатами являются углы поворота платформы: угол α поворота вокруг оси x , угол β поворота вокруг оси y и угол γ поворота вокруг оси z . Обобщенными координатами являются углы φ_{11} , φ_{21} , φ_{31} поворота входных звеньев соответственно первой, второй и третьей кинематической цепи.

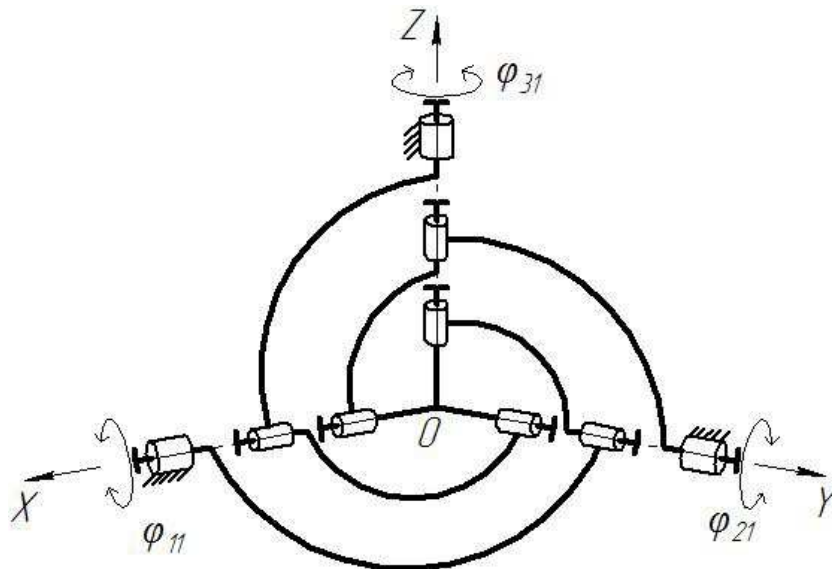


Рис.4.10. Кинематическая схема сферического манипулятора с тремя кинематическими парами

Запишем матрицу, описывающую переход от подвижной системы координат к неподвижной системе координат выходного звена. Выходное звено поворачи-

чивается в следующем порядке: сначала поворот вокруг оси z , затем – вокруг оси y и наконец – вокруг оси x . Матрицы поворота \mathbf{A} вокруг осей x , y , z имеют следующий вид:

$$\text{вокруг оси } x \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

$$\text{вокруг оси } y \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix};$$

$$\text{вокруг оси } z \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица, описывающая переход от подвижной системы координат к неподвижной системе координат выходного звена, будет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3 \quad (4.4)$$

или после подстановки, получаем значение матрицы \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \cos \beta & \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \sin \gamma & \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \cos \beta \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta \cdot \sin \alpha & \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

При рассмотрении движения выходного звена для наглядности вводится фиктивная кинематическая цепь определения его поворота вокруг осей в следующей последовательности: $z(\gamma)$; $y(\beta)$; $x(\alpha)$ (рис.4.11).

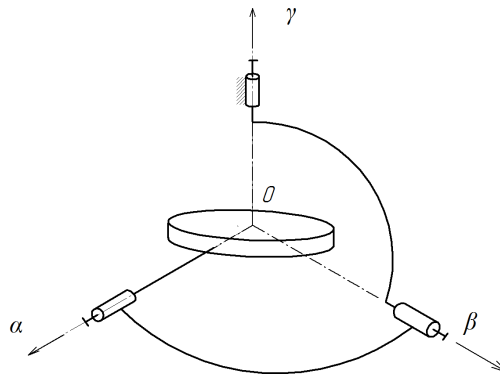


Рис. 4.11. Схема фиктивной кинематической цепи в неподвижной системе координат

В первой кинематической цепи входное звено осуществляет поворот вокруг осей в последовательности: x, y, z . Матрицы поворота \mathbf{B}' вокруг осей x, y, z имеют следующий вид:

$$\text{вокруг оси } x \mathbf{B}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{11} & -\sin \varphi_{11} \\ 0 & \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} \end{pmatrix};$$

$$\text{вокруг оси } y \mathbf{B}'_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} & 0 & \sin \varphi_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{12} & 0 & \cos \varphi_{12} \end{pmatrix};$$

$$\text{вокруг оси } z \mathbf{B}'_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{13} & -\sin \varphi_{13} & 0 \\ \sin \varphi_{13} & \cos \varphi_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица, описывающая переход от подвижной системы координат к неподвижной системе координат выходного звена, будет иметь вид:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_1 \cdot \mathbf{B}'_2 \cdot \mathbf{B}'_3 \quad (4.5)$$

или:

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{13} & -\cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{13} & \sin \varphi_{12} \\ \cos \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{13} - \cos \varphi_{13} \cdot \sin \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{13} - \sin \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{13} & -\cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11} \\ \sin \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{13} - \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{13} \cdot \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{13} \cdot \sin \varphi_{11} + \cos \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{13} & \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{12} \end{pmatrix}.$$

Единичный вектор оси пары выходного звена первой цепи имеет координаты $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Подставив в уравнение связи $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ найденные значения матриц \mathbf{A} и \mathbf{B}' , получаем уравнение

$$\begin{pmatrix} \sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \cos \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \beta \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{12} \\ -\cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11} \\ \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{12} \end{pmatrix},$$

из которого можно выразить угол φ_{11} через углы α, β, γ .

Во второй кинематической цепи единичный вектор оси выходного звена имеет координаты $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Входное звено осуществляет поворот вокруг осей в после-

довательности: y, z, x . Матрицы поворота \mathbf{B}'' вокруг осей y, z, x имеют следующий вид:

$$\text{вокруг оси } y \mathbf{B}_2'' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & 0 & \sin \varphi_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{21} & 0 & \cos \varphi_{21} \end{pmatrix};$$

$$\text{вокруг оси } z \mathbf{B}_3'' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{22} & -\sin \varphi_{22} & 0 \\ \sin \varphi_{22} & \cos \varphi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{вокруг оси } x \mathbf{B}_1'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{23} & -\sin \varphi_{23} \\ 0 & \sin \varphi_{23} & \cos \varphi_{23} \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от подвижной системы координат к неподвижной системе координат входного звена будет иметь вид:

$$\mathbf{B}'' = \mathbf{B}_2'' \cdot \mathbf{B}_3'' \cdot \mathbf{B}_1'' \quad (4.6)$$

или:

$$\mathbf{B}'' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{22} & \sin \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{23} - \cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{23} \cdot \sin \varphi_{22} & \cos \varphi_{23} \cdot \sin \varphi_{21} + \cos \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{23} \\ \sin \varphi_{22} & \cos \varphi_{22} \cdot \cos \varphi_{23} & -\cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{23} \\ -\cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{23} + \cos \varphi_{23} \cdot \sin \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22} & \cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{23} - \sin \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{23} \end{pmatrix}$$

Подставив в уравнение связи $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}'' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ значения матриц \mathbf{A} и \mathbf{B}'' , получаем

$$\text{уравнение } \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ -\sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} \cdot \cos \varphi_{22} \\ \sin \varphi_{22} \\ -\cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{21} \end{pmatrix}, \text{ из которого можно выразить угол}$$

φ_{21} через углы α, β, γ .

В третьей кинематической цепи единичный вектор оси пары выходного зве-

на имеет координаты $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Входное звено осуществляет поворот в следующей по-

следовательности: вокруг осей z, x, y . Матрицы поворота \mathbf{B}''' вокруг осей z, x, y имеют следующий вид:

$$\text{вокруг оси } z \mathbf{B}_3''' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} & -\sin \varphi_{31} & 0 \\ \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{вокруг оси } x \mathbf{B}_1''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{32} & -\sin \varphi_{32} \\ 0 & \sin \varphi_{32} & \cos \varphi_{32} \end{pmatrix};$$

$$\text{вокруг оси } y \mathbf{B}_2''' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{33} & 0 & \sin \varphi_{33} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{33} & 0 & \cos \varphi_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрица, описывающая переход от подвижной системы координат к неподвижной системе координат входного звена выглядит как:

$$\mathbf{B}''' = \mathbf{B}_3''' \cdot \mathbf{B}_1''' \cdot \mathbf{B}_2''' \quad (4.7)$$

или:

$$\mathbf{B}''' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} - \sin \varphi_{31} \cdot \sin^2 \varphi_{32} & -\cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32} + \cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{23} \\ \cos \varphi_{31} \cdot \sin^2 \varphi_{32} + \cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{23} & \sin \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32} - \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{32} \\ -\cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{32} & \sin \varphi_{23} & \cos^2 \varphi_{23} \end{pmatrix}.$$

Подставив найденных значений матриц \mathbf{A} и \mathbf{B}''' в уравнение связи

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}''' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ получаем уравнение:}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \\ \cos \beta \cdot \sin \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{31} \\ \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} \\ \sin \varphi_{32} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Из уравнения (4.8) можно выразить угол φ_{31} через углы α, β, γ .

Задача о положениях показывает взаимосвязь между координатами выходного звена и обобщенными координатами. Задача о положениях описывается функцией положения. В неявном виде функция положения механизма выражается уравнением:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}) = 0 \quad (4.9)$$

Уравнение связи для сферического манипулятора с тремя кинематическими парами можно представить системой уравнений:

$$\begin{cases} F_1(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{11}) = 0; \\ F_2(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{21}) = 0; \\ F_3(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{31}) = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

После подстановки в уравнения связей (4.9) углов φ_{11} , φ_{21} , φ_{31} выраженных через α , β , γ имеем:

$$\begin{cases} F_1 = \operatorname{tg}\varphi_{11} - \frac{\cos\gamma \cdot \sin\gamma \cdot \sin\beta + \cos\gamma \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = 0; \\ F_2 = \frac{\sin\beta}{\cos\gamma \cdot \cos\beta} - \operatorname{tg}\varphi_{21} = 0; \\ F_3 = \frac{\cos\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot \sin\gamma}{\cos\alpha \cdot \cos\gamma + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} + \operatorname{tg}\varphi_{31} = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Таким образом, составлены уравнения связи между углами поворота входных звеньев и углами поворота выходного звена.

Теперь рассмотрим сферический механизм, построенный по принципу, когда каждая цепь отбирает по одной степени свободы (рис.4.12) [85, 111, 167]. В этом механизме начальная вращательная кинематическая пара, расположена перпендикулярно оси двигателя, а две промежуточные вращательные пары, расположены параллельно оси начальной пары. Конечная вращательная пара, расположена перпендикулярно оси второй промежуточной пары и сопряжена с выходным звеном. В первой цепи ось вращательного двигателя расположена вдоль оси x , ось начальной вращательной пары расположена параллельно оси y , ось конечной вращательной пары расположена вдоль оси z . Во второй кинематической цепи ось вращательного двигателя расположена вдоль оси y , ось начальной вращательной пары расположена вдоль оси z , ось конечной вращательной пары расположена вдоль оси x . В третьей кинематической цепи ось вращательного двигателя расположена вдоль оси z , ось начальной вращательной пары расположена параллельно оси x , ось конечной вращательной пары расположена вдоль оси y .

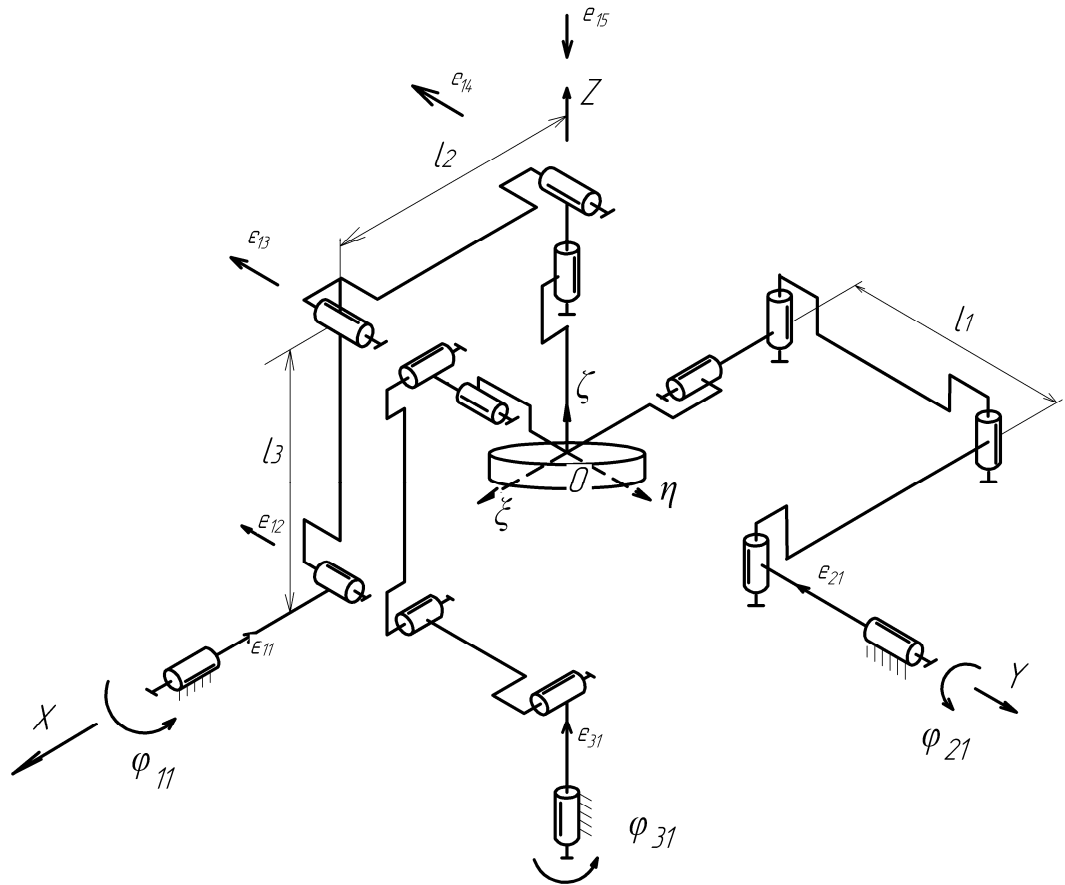


Рис.4.12. Сферический механизм в пятью кинематическими парами в цепях

Первая цепь совершает следующие перемещения: поворот вокруг оси x на угол φ_{11} , поворот вокруг оси y на угол φ_{12} , перенос по оси z на расстояние l_3 , перенос по оси x на расстояние l_2 , поворот вокруг z на угол φ_{13} . Эти перемещения описываются соответствующими матрицами в случае использования представления Денавитта-Хартенберга:

$$\mathbf{B}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{11} & -\sin \varphi_{11} & 0 \\ 0 & \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}'_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} & 0 & \sin \varphi_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_{12} & 0 & \cos \varphi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}'_5 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{13} & -\sin \varphi_{13} & 0 & 0 \\ \sin \varphi_{13} & \cos \varphi_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода входного звена первой цепи от подвижной системы координат к неподвижной равна:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_1 \cdot \mathbf{B}'_2 \cdot \mathbf{B}'_3 \cdot \mathbf{B}'_4 \cdot \mathbf{B}'_5. \quad (4.12)$$

Единичный вектор оси входной пары равен $\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Выходное звено совершает последовательный поворот вокруг осей z, y, x соответственно на углы поворота γ, β, α . Матрицы, описывающие поворот вокруг осей z, y, x соответственно выглядят следующим образом:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица, описывающая переход выходного звена от подвижной системы координат к неподвижной, будет иметь вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3 \quad (4.13)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \cos \beta & \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha & \sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta & 0 \\ \sin \gamma \cdot \cos \beta & \cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha & \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta \cdot \sin \alpha & \cos \beta \cdot \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Подставив в уравнение связи $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_1 = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{P}_1$ найденные значения матриц \mathbf{A} и \mathbf{B}' , получим выражение:

$$\begin{pmatrix} \sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \beta \cdot \cos \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{12} + l_2 \cdot \cos \varphi_{12} + l_3 \cdot \sin \varphi_{12} \\ -\sin \varphi_{11} \cdot (-l_2 \cdot \sin \varphi_{12} + l_3 \cdot \cos \varphi_{12} + \cos \varphi_{12}) \\ \cos \varphi_{11} \cdot (\cos \varphi_{12} + l_3 \cdot \cos \varphi_{12} - l_2 \cdot \sin \varphi_{12}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Из полученного уравнения (4.14) выражаем угол φ_{11} через α, β, γ :

$$\operatorname{tg} \varphi_{11} = \frac{\sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha}{\cos \beta \cdot \cos \alpha} \quad (4.15)$$

Аналогичным образом составим уравнения связи для второй и третьей цепей. Единичный вектор оси выходного звена второй кинематической цепи имеет

координаты $\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Входное звено второй цепи совершает следующие переме-

щения: поворот вокруг оси y на угол φ_{21} , поворот вокруг оси z на угол φ_{22} , перенос по оси x на расстояние l_2 , перенос по оси y на расстояние l_1 , поворот вокруг x на угол φ_{23} , которые описываются соответствующими матрицами:

$$\mathbf{B}_1'' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & 0 & \sin \varphi_{21} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_{21} & 0 & \cos \varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2'' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{22} & -\sin \varphi_{22} & 0 & 0 \\ \sin \varphi_{22} & \cos \varphi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_4'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_5'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{23} & -\sin \varphi_{23} & 0 \\ 0 & \sin \varphi_{23} & \cos \varphi_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода входного звена второй цепи от подвижной системы координат к неподвижной равна:

$$\mathbf{B}'' = \mathbf{B}_1'' \cdot \mathbf{B}_2'' \cdot \mathbf{B}_3'' \cdot \mathbf{B}_4'' \cdot \mathbf{B}_5'' \quad (4.16)$$

Подставив в уравнение связи $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_2 = \mathbf{B}'' \cdot \mathbf{P}_2$ найденные значения матриц \mathbf{A} и \mathbf{B}'' , получим выражение:

$$\begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ -\sin \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} \cdot (\cos \varphi_{22} + l_1 \cdot \cos \varphi_{22} - l_2 \cdot \sin \varphi_{22}) \\ -\sin \varphi_{22} + l_2 \cdot \cos \varphi_{22} + l_1 \cdot \sin \varphi_{22} \\ \sin \varphi_{21} \cdot (l_2 \cdot \sin \varphi_{22} - l_1 \cdot \cos \varphi_{22} - \cos \varphi_{12}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Из уравнения (4.14) выразим угол φ_{21} через α , β , γ :

$$\operatorname{tg} \varphi_{21} = \frac{\sin \beta}{\cos \gamma \cdot \cos \beta} \quad (4.18)$$

В третьей кинематической цепи единичный вектор оси выходного звена

имеет координаты $\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Входное звено третьей цепи совершает перемещения

в следующей последовательности: поворот вокруг оси z на угол φ_{31} , поворот вокруг оси x на угол φ_{32} , перенос по оси y на расстояние l_1 , перенос по оси z на расстояние l_3 , поворот вокруг x на угол φ_{33} . Этим перемещениям соответствует матрицы:

$$\mathbf{B}_1''' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} & -\sin \varphi_{31} & 0 & 0 \\ \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B}_2''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{32} & -\sin \varphi_{32} & 0 \\ 0 & \sin \varphi_{32} & \cos \varphi_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B}_3''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_4''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B}_5''' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{33} & 0 & \sin \varphi_{33} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_{33} & 0 & \cos \varphi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода входного звена третьей цепи от подвижной системы координат к неподвижной равна:

$$\mathbf{B}''' = \mathbf{B}_1''' \cdot \mathbf{B}_2''' \cdot \mathbf{B}_3''' \cdot \mathbf{B}_4''' \cdot \mathbf{B}_5''' \quad (4.19)$$

Подставив в уравнение связи $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_3 = \mathbf{B}''' \cdot \mathbf{P}_3$ найденные значения матриц \mathbf{A} и \mathbf{B}''' , получим выражение

$$\begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \\ \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \\ \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{31} \cdot (l_3 \cdot \sin \varphi_{32} - l_1 \cdot \cos \varphi_{32} - \cos \varphi_{32}) \\ \cos \varphi_{31} \cdot (\cos \varphi_{32} + l_1 \cdot \cos \varphi_{32} - l_3 \cdot \sin \varphi_{32}) \\ \sin \varphi_{32} + l_3 \cdot \cos \varphi_{32} + l_1 \cdot \sin \varphi_{32} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Выразим угол φ_{31} через α , β , γ , разделив вторую строчку на первую и приравняв строки матриц уравнения (4.20) получаем выражение:

$$\operatorname{tg} \varphi_{31} = -\frac{\cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot \sin \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} \quad (4.21)$$

Таким образом, полученные уравнения связей для двух рассмотренных механизмов совпали.

Теперь рассмотрим механизм с повторяющимися связями (рис.4.13) [84, 112, 213].

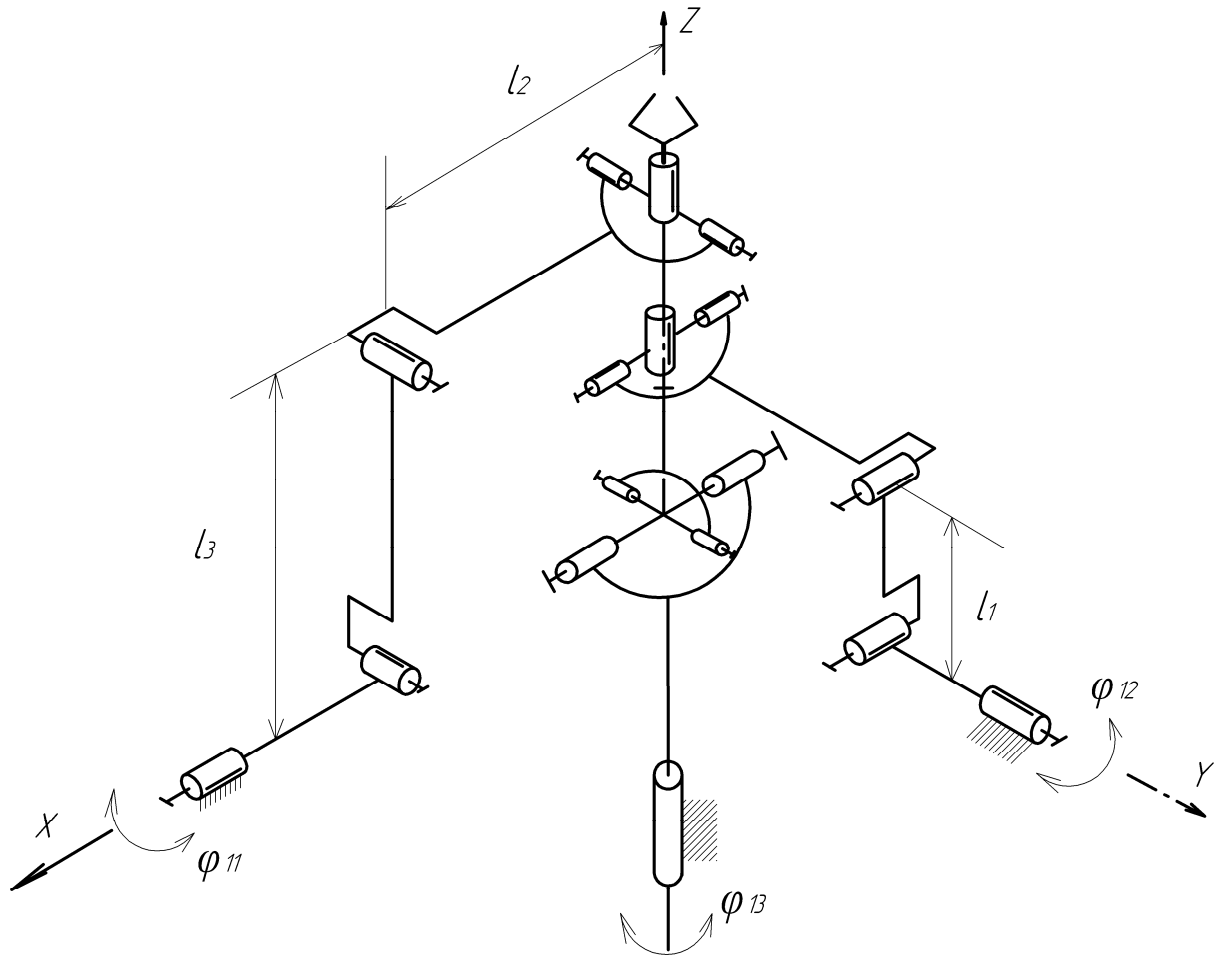


Рис. 4.13 Сферический механизм с повторяющимися связями

Первая цепь совершает следующие перемещения: поворот вокруг оси x на угол φ_{11} , поворот вокруг оси y на угол φ_{12} , перенос по оси z на расстояние l_3 , перенос по оси x на расстояние l_2 , поворот вокруг z на угол φ_{13} . Эти перемещения описываются соответствующими матрицами в случае использования представления Денавитта-Хартенберга:

$$\mathbf{B}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{11} & -\sin \varphi_{11} & 0 \\ 0 & \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}'_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} & 0 & \sin \varphi_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_{12} & 0 & \cos \varphi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}'_5 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{13} & -\sin \varphi_{13} & 0 & 0 \\ \sin \varphi_{13} & \cos \varphi_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода входного звена первой цепи от подвижной системы координат к неподвижной равна:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_1 \cdot \mathbf{B}'_2 \cdot \mathbf{B}'_3 \cdot \mathbf{B}'_4 \cdot \mathbf{B}'_5 \quad (4.22)$$

Единичный вектор оси входной пары равен $\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Выходное звено совершает

последовательный поворот вокруг осей z , y , x соответственно на углы поворота γ , β , α . Матрицы, описывающие поворот вокруг осей z , y , x соответственно выглядят следующим образом:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица, описывающая переход выходного звена от подвижной системы координат к неподвижной, будет иметь вид:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3 \quad (4.23)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \cos \beta & \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha & \sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta & 0 \\ \sin \gamma \cdot \cos \beta & \cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha & \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta \cdot \sin \alpha & \cos \beta \cdot \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Подставив в уравнение связи $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_1 = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{P}_1$ найденные значения матриц \mathbf{A} и \mathbf{B}' , получим выражение:

$$\begin{pmatrix} \sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \beta \cdot \cos \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{12} + l_2 \cdot \cos \varphi_{12} + l_3 \cdot \sin \varphi_{12} \\ -\sin \varphi_{11} \cdot (-l_2 \cdot \sin \varphi_{12} + l_3 \cdot \cos \varphi_{12} + \cos \varphi_{12}) \\ \cos \varphi_{11} \cdot (\cos \varphi_{12} + l_3 \cdot \cos \varphi_{12} - l_2 \cdot \sin \varphi_{12}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Из полученного уравнения (4.24) выражаем угол φ_{11} через α , β , γ :

$$\operatorname{tg} \varphi_{11} = \frac{\sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha}{\cos \beta \cdot \cos \alpha} \quad (4.25)$$

Вторая кинематическая цепь совершает следующие перемещения: поворот вокруг оси y на угол φ_{21} , поворот вокруг оси x на угол φ_{22} , перенос по оси z на расстояние l_3 , перенос по оси y на расстояние l_1 , поворот вокруг z на угол φ_{31} .

Единичный вектор оси выходного звена второй кинематической цепи имеет

координаты $\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Эти перемещения описываются соответствующими матри-

цами:

$$\mathbf{B}_1'' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & 0 & \sin \varphi_{21} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_{21} & 0 & \cos \varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{22} & -\sin \varphi_{22} & 0 \\ 0 & \sin \varphi_{22} & \cos \varphi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_4'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_5'' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{23} & -\sin \varphi_{23} & 0 & 0 \\ \sin \varphi_{23} & \cos \varphi_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода входного звена второй цепи от подвижной системы координат к неподвижной равна:

$$\mathbf{B}'' = \mathbf{B}_1'' \cdot \mathbf{B}_2'' \cdot \mathbf{B}_3'' \cdot \mathbf{B}_4'' \cdot \mathbf{B}_5'' \quad (4.26)$$

Подставив в уравнение связи $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_2 = \mathbf{B}'' \cdot \mathbf{P}_2$ найденные значения матриц \mathbf{A} и \mathbf{B}'' , получим выражение:

$$\begin{pmatrix} \sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \beta \cdot \cos \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} \cdot (\cos \varphi_{23} + l_3 \cdot \cos \varphi_{23} + l_2 \cdot \sin \varphi_{23}) \\ -\sin \varphi_{21} \cdot (-l_2 \cdot \sin \varphi_{23} + l_3 \cdot \cos \varphi_{23} + \cos \varphi_{23}) \\ \sin \varphi_{21} \cdot (\cos \varphi_{23} + l_3 \cdot \cos \varphi_{23} + \cos \varphi_{23}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Выразим угол φ_{21} через α, β, γ из уравнения (4.27):

$$\operatorname{tg} \varphi_{21} = \frac{\cos \beta \cdot \cos \alpha}{\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta} \quad (4.28)$$

В третьей кинематической цепи единичный вектор оси выходного звена

имеет координаты $\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Третья кинематическая цепь совершает переме-

щения в следующей последовательности: поворот вокруг оси z на угол φ_{31} , поворот вокруг оси x на угол φ_{32} , поворот вокруг оси y на угол φ_{33} . Этим перемещениям соответствует матрицы:

$$\mathbf{B}_1''' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} & -\sin \varphi_{31} & 0 & 0 \\ \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{32} & -\sin \varphi_{32} & 0 \\ 0 & \sin \varphi_{32} & \cos \varphi_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3''' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{33} & 0 & \sin \varphi_{33} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_{33} & 0 & \cos \varphi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода входного звена третьей цепи от подвижной системы координат к неподвижной равна:

$$\mathbf{B}''' = \mathbf{B}_1''' \cdot \mathbf{B}_2''' \cdot \mathbf{B}_3''' \quad (4.29)$$

Подставив в уравнение связи $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_3 = \mathbf{B}''' \cdot \mathbf{P}_3$ найденные значения матриц \mathbf{A} и \mathbf{B}''' , получим выражение :

$$\begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \\ \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha \\ \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{31} \\ \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} \\ \sin \varphi_{32} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Выразим из уравнения (4.30) угол φ_{31} через α, β, γ , разделив вторую строчку на первую и приравняв строки матриц получаем выражение:

$$\operatorname{tg}\varphi_{31} = \frac{\cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha} \quad (4.31)$$

Задача о положениях показывает взаимосвязь между координатами выходного звена и входного. Задача о положениях описывается функцией положения. В неявном виде функция положения механизма выражается уравнением $F(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}) = 0$. Уравнение связи для сферического манипулятора с тремя кинематическими парами можно представить системой уравнений:

$$\begin{cases} F_1(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{11}) = 0 \\ F_2(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{21}) = 0 \\ F_3(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{31}) = 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

Углы φ_{11} , φ_{12} , φ_{13} выраженные через α , β , γ подставим в уравнения связей (4.31):

$$\begin{cases} F_1 = \operatorname{tg}\varphi_{11} - \frac{\sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma \cdot \sin \alpha}{\cos \beta \cdot \cos \alpha} = 0 \\ F_2 = \operatorname{tg}\varphi_{21} - \frac{\cos \beta \cdot \cos \alpha}{\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta} = 0 \\ F_3 = \operatorname{tg}\varphi_{31} - \frac{\cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha} = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

Полученные уравнения связи устанавливают соотношения между углами поворота входных и выходных звеньев.

Таким образом, рассмотрены сферические механизмы параллельной структуры, строящиеся по различным принципам. Для исследуемых механизмов выведены уравнения связей. Показано, что при различных кинематических схемах механизмы могут совершать одинаковые движения.

4.3. Решение задач о скоростях и особых положениях

В параграфе приведено решение кинематических задач – прямые и обратные задачи о скоростях, определение особых положений сферического механизма с тремя кинематическими парами в каждой цепи. Задачи о скоростях решаются двумя методами с использованием уравнений связей и методом винтового исчисления.

4.3.1. Расчет скоростей механизма методом дифференцирования уравнений связи

Для решения задачи о скоростях будем использовать аналитический подход, основанный на изучении свойств матрицы Якоби [118]. Уравнения скоростей можно представить с следующим виде:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = (-\mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\omega}_1, \quad (4.34)$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi_{31}} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_{31} \end{pmatrix},$$

\mathbf{A} – матрица частных производных от неявной функции по α, β, γ ;

\mathbf{B} – матрица частных производных от неявной функции по обобщенным координатам $\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}$;

\mathbf{V} – скорости изменения углов ориентации выходного звена, разложенные на базис не перпендикулярных друг другу осей, которые определяются углами α, β, γ ;

$\boldsymbol{\omega}_1$ – обобщенные скорости во вращательных шарнирах (входные скорости).

Скорость выходного звена может быть разложена на оси x, y, z и на оси, определяемые углами α, β, γ .

Для решения задачи о скоростях необходимо найти соотношение проекций скоростей на оси α, β, γ и оси x, y, z . Обозначив скорости $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ вокруг осей α, β, γ , а скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ вокруг осей x, y, z , можно получить соотношение:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\alpha} \cdot x_\alpha + \dot{\beta} \cdot x_\beta + \dot{\gamma} \cdot x_\gamma; \\ \omega_y &= \dot{\alpha} \cdot y_\alpha + \dot{\beta} \cdot y_\beta + \dot{\gamma} \cdot y_\gamma; \\ \omega_z &= \dot{\alpha} \cdot z_\alpha + \dot{\beta} \cdot z_\beta + \dot{\gamma} \cdot z_\gamma. \end{aligned} \quad (4.35)$$

где $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$ – координаты единичного вектора оси первой кинематической пары

фиктивной кинематической цепи, расположенной вдоль оси z
$$\begin{pmatrix} x_\gamma \\ y_\gamma \\ z_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$x_\beta, y_\beta, z_\beta$ – координаты единичного вектора второй кинематической пары фиктивной кинематической цепи, равные произведению матрицы поворота на угол γ вокруг оси z и умноженные на координаты единичного вектора второй пары в начальном положении

$$\begin{pmatrix} x_\beta \\ y_\beta \\ z_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \gamma \\ \cos \gamma \\ 0 \end{pmatrix};$$

$x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ – координаты единичного вектора третьей кинематической пары фиктивной кинематической цепи, равные произведению матрицы поворота выходного звена на координаты единичного вектора третьей пары в начальном положении

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} = (\mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix}$$

Запишем уравнение скоростей (4.34) в виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \phi_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \phi_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \phi_{31}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\phi}_{11} \\ \dot{\phi}_{21} \\ \dot{\phi}_{31} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

находим частные производные от неявной функции по обобщенным и абсолютным координатам:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = -\frac{\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha}{\cos \beta \cdot \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \beta \cdot \cos^2 \alpha};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \beta} = \sin \gamma - \frac{\sin \beta \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta)}{\cos^2 \beta \cdot \cos \alpha};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \gamma} = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha - \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \beta \cdot \cos \alpha}; \quad \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial \beta} = \frac{1}{\cos \gamma} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos \gamma \cdot \cos^2 \beta};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \gamma} = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \beta}{\cos^2 \gamma \cdot \cos \beta};$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha} = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha} - \frac{(\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin^2 \alpha};$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \beta} = \frac{\cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha} + \frac{\sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)}{\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin^2 \alpha};$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \gamma} = - \frac{(\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)^2}{(\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)^2} - 1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} = \operatorname{tg}^2 \varphi_{11} + 1; \quad \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{21}} = -\operatorname{tg}^2 \varphi_{21} - 1;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{31}} = \operatorname{tg}^2 \varphi_{31} + 1.$$

Полученные уравнения позволяют решить прямую задачу о скоростях, т.е. определение скоростей выходного звена при известных скоростях входного звена, и обратную задачу о скоростях, когда рассчитывается скорость входного звена при известных скоростях выходного звена.

Пример решения задач о скоростях. Решим обратную задачу о скоростях, т.е. определим скорость входного звена. зададим скорости выходного звена: $\omega_x=1$ рад/с; $\omega_y=1$ рад/с; $\omega_z=1$ рад/с, и положения выходного звена: $\alpha=1$ рад, $\beta=1$ рад, $\gamma=1$ рад.

Рассчитаем определяемые углами α , β и γ скорости изменения углов ориентации выходного звена, разложенные на базис неперпендикулярных друг другу осей. Координаты кинематических пар будут равны:

$$\begin{pmatrix} x_\beta \\ y_\beta \\ z_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \gamma \\ \cos \gamma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,854 \\ 0,54 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cdot \cos \beta \\ \sin \gamma \cdot \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,292 \\ 0,454 \\ -0,841 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_\gamma \\ y_\gamma \\ z_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, подставляя найденные значения в уравнения (4.35), имеем:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\alpha} \cdot x_\alpha + \dot{\beta} \cdot x_\beta + \dot{\gamma} \cdot x_\gamma = 0,292 \cdot \dot{\alpha} - 0,854 \cdot \dot{\beta} + 0 \cdot \dot{\gamma} \\
\omega_y &= \dot{\alpha} \cdot y_\alpha + \dot{\beta} \cdot y_\beta + \dot{\gamma} \cdot y_\gamma = 0,454 \cdot \dot{\alpha} + 0,54 \cdot \dot{\beta} + 0 \cdot \dot{\gamma} \\
\omega_z &= \dot{\alpha} \cdot z_\alpha + \dot{\beta} \cdot z_\beta + \dot{\gamma} \cdot z_\gamma = -0,841 \cdot \dot{\alpha} + 0 \cdot \dot{\beta} + 1 \cdot \dot{\gamma}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Решив найденную систему уравнений, вычисляем значения скоростей:
 $\dot{\alpha} = 2,556$ рад/с; $\dot{\beta} = -0,302$ рад/с; $\dot{\gamma} = 3,15$ рад/с.

После дифференцирования уравнения скоростей (4.36) можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} -3,425 & 0,457 & 3,267 \\ 0 & 6,34 & 4,489 \\ 1,068 & 0,312 & -1,007 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,556 \\ -0,302 \\ 3,15 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1,061 & 0 & 0 \\ 0 & -9,316 & 0 \\ 0 & 0 & 1,007 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\phi}_{11} \\ \dot{\phi}_{21} \\ \dot{\phi}_{31} \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

и находим значения обобщенных скоростей:

$$\dot{\phi}_{11} = -1,318 \text{ рад/с}, \quad \dot{\phi}_{21} = 1,316 \text{ рад/с}, \quad \dot{\phi}_{31} = 0,532 \text{ рад/с}.$$

Получено решение прямой задачи о скоростях с использованием уравнений связей.

4.3.2. Решение задачи о скоростях методом винтового исчисления

Рассмотрим решение обратной задачи о скоростях с применением теории винтов. Под обратной задачей понимается определение скоростей звеньев входного звена при известных скоростях выходного звена. Можно записать, что угловая скорость выходного звена равна сумме угловых скоростей шарниров звеньев одной цепи.

Зададим $\omega_x=1$ рад/с, $\omega_y=1$ рад/с, $\omega_z=1$ рад/с.

Для первой кинематической цепи составляем уравнения:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \omega_{11} \cdot x_{11} + \omega_{12} \cdot x_{12} + \omega_{13} \cdot x_{13} \\
\omega_y &= \omega_{11} \cdot y_{11} + \omega_{12} \cdot y_{12} + \omega_{13} \cdot y_{13} \\
\omega_z &= \omega_{11} \cdot z_{11} + \omega_{12} \cdot z_{12} + \omega_{13} \cdot z_{13}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

где (x_{11}, y_{11}, z_{11}) – координаты единичного вектора оси первой пары, $\begin{pmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(x_{12}, y_{12}, z_{12}) – координаты единичного вектора оси второй пары, которые определяются произведением матрицы поворота вокруг оси x на координаты единичного вектора оси второй пары в ее начальном положении

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{11} & -\sin \varphi_{11} \\ 0 & \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi_{11} \\ \sin \varphi_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,971 \\ 0,24 \end{pmatrix};$$

(x_{13}, y_{13}, z_{13}) – координаты оси третьей пары, которые определяются произведением матрицы поворота выходного звена на координаты единичного вектора оси третьей пары в ее начальном положении

$$\begin{pmatrix} x_{13} \\ y_{13} \\ z_{13} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \sin \gamma \\ \cos \beta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,954 \\ -0,072 \\ 0,292 \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнения (4.38) скоростей в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \\ 0 & \cos \varphi_{11} & \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \sin \gamma \\ 0 & -\sin \varphi_{11} & \cos \beta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \\ \omega_{13} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Скорости шарниров в кинематической цепи определяем, решив полученное уравнение с учётом правила Крамера. Находим значение определителя матрицы \mathbf{C} , составленной из координат осей первой, второй и третьей пар, а также матриц \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 , в которых последовательно заменены столбцы матрицы \mathbf{C} на заданные значения скоростей:

$$\det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0,954 \\ 0 & 0,971 & -0,072 \\ 0 & 0,24 & 0,292 \end{vmatrix} = 0,3;$$

$$\det(\mathbf{C}_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0,954 \\ 1 & 0,971 & -0,072 \\ 1 & 0,24 & 0,292 \end{vmatrix} = -0,396;$$

$$\det(\mathbf{C}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0,954 \\ 0 & 1 & -0,072 \\ 0 & 1 & 0,292 \end{pmatrix} = 0,364;$$

$$\det(\mathbf{C}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,971 & 1 \\ 0 & 0,24 & 1 \end{pmatrix} = 0,731.$$

Соответственно скорости шарниров составляют:

$$\omega_{11} = \frac{\det(\mathbf{C}_1)}{\det(\mathbf{C})} = -1,318 \text{ рад/с}, \quad \omega_{12} = \frac{\det(\mathbf{C}_2)}{\det(\mathbf{C})} = 1,21 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{13} = \frac{\det(\mathbf{C}_3)}{\det(\mathbf{C})} = 2,43 \text{ рад/с}.$$

Для второй кинематической цепи составим уравнение скоростей:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{21} \cdot x_{21} + \omega_{22} \cdot x_{22} + \omega_{23} \cdot x_{23} \\ \omega_y &= \omega_{21} \cdot y_{21} + \omega_{22} \cdot y_{22} + \omega_{23} \cdot y_{23} \\ \omega_z &= \omega_{21} \cdot z_{21} + \omega_{22} \cdot z_{22} + \omega_{23} \cdot z_{23} \end{aligned} \quad (4.41)$$

где (x_{21}, y_{21}, z_{21}) – координаты единичного вектора оси первой пары $\begin{pmatrix} x_{21} \\ y_{21} \\ z_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(x_{22}, y_{22}, z_{22}) – координаты единичного вектора оси второй пары, которые определяются произведением матрицы поворота вокруг оси y на координаты единичного вектора оси второй пары в ее начальном положении

$$\begin{pmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & 0 & \sin \varphi_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{21} & 0 & \cos \varphi_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{21} \\ 0 \\ \cos \varphi_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,944 \\ 0 \\ 0,327 \end{pmatrix};$$

(x_{23}, y_{23}, z_{23}) – координаты единичного вектора оси третьей пары, которые определяются произведением матрицы поворота выходного звена на координаты единичного вектора оси третьей пары в ее начальном положении

$$\begin{pmatrix} x_{23} \\ y_{23} \\ z_{23} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ -\sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,292 \\ 0,454 \\ -0,841 \end{pmatrix}.$$

Уравнения скоростей (4.41) представим в виде:

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ 0 & \cos \varphi_{21} & \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ 0 & \sin \varphi_{21} & -\sin \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{22} \\ \omega_{23} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Решив полученное уравнение с учётом правила Крамера, определяем скорости шарниров в кинематической цепи:

$$\omega_{21}=1,316 \text{ рад/с}, \quad \omega_{22}=1,274 \text{ рад/с}, \quad \omega_{23}=-0,785 \text{ рад/с}.$$

Для третьей кинематической цепи уравнения скоростей имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{31} \cdot x_{31} + \omega_{32} \cdot x_{32} + \omega_{33} \cdot x_{33} \\ \omega_y &= \omega_{31} \cdot y_{31} + \omega_{32} \cdot y_{32} + \omega_{33} \cdot y_{33} \\ \omega_z &= \omega_{31} \cdot z_{31} + \omega_{32} \cdot z_{32} + \omega_{33} \cdot z_{33} \end{aligned} \quad (4.43)$$

где (x_{31}, y_{31}, z_{31}) – координаты единичного вектора оси первой пары, $\begin{pmatrix} x_{31} \\ y_{31} \\ z_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

(x_{32}, y_{32}, z_{32}) – координаты единичного вектора оси второй пары, которые определяются произведением матрицы поворота вокруг оси z на координаты единичного вектора оси второй пары в ее начальном положении

$$\begin{pmatrix} x_{32} \\ y_{32} \\ z_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} & -\sin \varphi_{31} & 0 \\ \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} \\ \sin \varphi_{31} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,996 \\ 0,0809 \\ 0 \end{pmatrix};$$

(x_{33}, y_{33}, z_{33}) – координаты единичного вектора оси третьей пары, которые определяются произведением матрицы поворота выходного звена на координаты единичного вектора оси третьей пары в ее начальном положении

$$\begin{pmatrix} x_{33} \\ y_{33} \\ z_{33} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \\ -\cos \beta \cdot \sin \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,072 \\ 0,888 \\ 0,455 \end{pmatrix}.$$

Уравнения скоростей (4.42) представим в виде:

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos \varphi_{31} & \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ 0 & \sin \varphi_{31} & \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \\ 1 & 0 & -\cos \beta \cdot \sin \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{31} \\ \omega_{32} \\ \omega_{33} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Решив полученное уравнение с учётом правила Крамера, определяем скорости шарниров в кинематической цепи:

$$\omega_{31}=0,532 \text{ рад/с}, \quad \omega_{32}=1,078 \text{ рад/с}, \quad \omega_{33}=1,029 \text{ рад/с}.$$

Теперь рассмотрим решение прямой задачи о скоростях, т.е. определение скорости выходного звена при известных скоростях входного звена. При рассмотрении прямой задачи о скоростях необходимо определить силовые и кинематические винты [15]. Силовой винт \mathbf{R}_i с координатами $(r_{ix}, r_{iy}, r_{iz}, r_{ix}^0, r_{iy}^0, r_{iz}^0)$ взаимен двум ортам осей $\mathbf{e}_{i2}, \mathbf{e}_{i3}$ неприводных пар. Этот винт \mathbf{r}_i уравновешен совокупностью винтов – реакций в парах, соответствующих ортам $\mathbf{e}_{i2}, \mathbf{e}_{i3}$.

Относительный момент $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_i)$ – сумма скалярных произведений вектора первого винта на момент второго относительно некоторой точки и вектора второго винта на момент первого относительно той же точки, где $\mathbf{\Omega}_i$ – кинематический винт выходного звена с координатами $(V_x, V_y, V_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$; V_x, V_y, V_z – линейные скорости выходного звена, м/с. Кинематический винт выходного звена равен сумме кинематических винтов звеньев цепи $\mathbf{\Omega}_i = \mathbf{\Omega}_{i1} + \mathbf{\Omega}_{i2} + \mathbf{\Omega}_{i3}$,

где $\mathbf{\Omega}_{i1}, \mathbf{\Omega}_{i2}, \mathbf{\Omega}_{i3}$ – кинематические винты в первой, второй, третьей парах i -го звена с координатами соответственно $(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}, x_{i1}^0, y_{i1}^0, z_{i1}^0) \cdot \omega_{i1}$, $(x_{i2}, y_{i2}, z_{i2}, x_{i2}^0, y_{i2}^0, z_{i2}^0) \cdot \omega_{i2}$, $(x_{i3}, y_{i3}, z_{i3}, x_{i3}^0, y_{i3}^0, z_{i3}^0) \cdot \omega_{i3}$.

Тогда $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_i) = \text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_{i1} + \mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_{i2} + \mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_{i3})$.

Так как силовой винт взаимен ортам неприводных пар, то относительные моменты $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_{i2}) = 0$, $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_{i3}) = 0$. Поэтому можно записать, что $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_i) = \text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_{i1})$. Подставив значения координат силовых и кинематических винтов, получим уравнения относительных моментов:

$$\text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_i) = \omega_x r_{ix}^0 + \omega_y r_{iy}^0 + \omega_z r_{iz}^0$$

$$\text{mom}(\mathbf{R}, \mathbf{\Omega}_{i1}) = \omega_{i1} (x_{i1} r_{ix}^0 + y_{i1} r_{iy}^0 + z_{i1} r_{iz}^0)$$

где (x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}) – плюккеровы координаты единичных векторов \mathbf{e}_{i1} , расположенных вдоль осей первых пар; \mathbf{r}_i^0 – моментная часть силового винта с координатами $r_{1x}^0, r_{1y}^0, r_{1z}^0$.

Составляем систему уравнений для трех кинематических цепей:

$$\begin{aligned}
\omega_x r_{1x}^0 + \omega_y r_{1y}^0 + \omega_z r_{1z}^0 &= \omega_{11} (x_{11} r_{1x}^0 + y_{11} r_{1y}^0 + z_{11} r_{1z}^0); \\
\omega_x r_{2x}^0 + \omega_y r_{2y}^0 + \omega_z r_{2z}^0 &= \omega_{21} (x_{21} r_{2x}^0 + y_{21} r_{2y}^0 + z_{21} r_{2z}^0); \\
\omega_x r_{3x}^0 + \omega_y r_{3y}^0 + \omega_z r_{3z}^0 &= \omega_{31} (x_{31} r_{3x}^0 + y_{31} r_{3y}^0 + z_{31} r_{3z}^0),
\end{aligned} \tag{4.45}$$

где (x_{11}, y_{11}, z_{11}) – координаты оси первой пары;

(x_{21}, y_{21}, z_{21}) – координаты оси второй пары, равные произведению матрицы, описывающей поворот вокруг первой оси, на координаты второй пары в начальном положении;

(x_{31}, y_{31}, z_{31}) – координаты оси третьей пары, равные произведению матрицы, описывающей поворот выходного звена, на координаты третьей пары в начальном положении.

Для первой кинематической цепи координаты моментной части силового винта можно рассчитать как:

$$\bar{\mathbf{r}}_1^0 = \bar{\mathbf{e}}_{12} \times \bar{\mathbf{e}}_{13} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_{13} & y_{13} & z_{13} \end{bmatrix} = \bar{i}(y_{12}z_{13} - z_{12}y_{13}) - \bar{j}(x_{12}z_{13} - z_{12}x_{13}) + \bar{k}(x_{12}y_{13} - y_{12}x_{13}).$$

Подставляя значения координат единичных векторов, получаем значения координат силового винта:

$$r_{1x}^0 = 0,301, r_{1y}^0 = 0,229, r_{1z}^0 = -0,926.$$

Составив и решив уравнение (4.45) для первой цепи $\omega_x r_{1x}^0 + \omega_y r_{1y}^0 + \omega_z r_{1z}^0 = \omega_{11} (x_{11} r_{1x}^0 + y_{11} r_{1y}^0 + z_{11} r_{1z}^0)$ с учётом найденных значений координат единичных векторов, имеем $\omega_{11} = -1,318$ рад/с.

Для второй и третьей кинематических цепей координаты моментной части силовых винтов \mathbf{r}_2^0 и \mathbf{r}_3^0 определяются как:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{r}}_2^0 = \bar{\mathbf{e}}_{22} \times \bar{\mathbf{e}}_{23} &= \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} \\ x_{23} & y_{23} & z_{23} \end{bmatrix} = \bar{i}(y_{22}z_{23} - z_{22}y_{23}) - \bar{j}(x_{22}z_{23} - z_{22}x_{23}) + \bar{k}(x_{22}y_{23} - y_{22}x_{23}), \\
\bar{\mathbf{r}}_3^0 = \bar{\mathbf{e}}_{32} \times \bar{\mathbf{e}}_{33} &= \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_{32} & y_{32} & z_{32} \\ x_{33} & y_{33} & z_{33} \end{bmatrix} = \bar{i}(y_{32}z_{33} - z_{32}y_{33}) - \bar{j}(x_{32}z_{33} - z_{32}x_{33}) + \bar{k}(x_{32}y_{33} - y_{32}x_{33}).
\end{aligned}$$

Подставляя значения единичных векторов, получаем для второй и третьей цепей значения координат силовых винтов:

$$\begin{aligned} r_{2x}^0 &= -0,149; r_{2y}^0 = 0,889; r_{2z}^0 = 0,430; \\ r_{3x}^0 &= 0,037; r_{3y}^0 = -0,454; r_{3z}^0 = 0,891. \end{aligned}$$

Составив и решив с уравнения (4.45) для второй и третьей цепей с учётом найденных значений координат силовых винтов, получаем значения скоростей $\omega_{21}=1,316$ рад/с и $\omega_{31}=0,532$ рад/с.

Таким образом, представлено решение задачи о скоростях с использованием винтового исчисления. Результаты совпали с результатами расчетов, полученных дифференцированием уравнений связей.

4.3.3. Решение задачи об особых положениях методом винтового исчисления

Особое положение механизма возможно в случае когда любая из цепи теряет степень свободы. Для определения особого положения в первой кинематической цепи запишем плюккерovy координаты $(x_{13}, y_{13}, z_{13})'$ единичного вектора \mathbf{e}_{13} , определяемые произведением матрицы поворота выходного звена вокруг сначала первой оси ox , затем второй оси oy на координаты вектора, расположенного вдоль оси третьей пары в ее начальном положении:

$$\begin{pmatrix} x_{13} \\ y_{13} \\ z_{13} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{11} & -\sin \varphi_{11} \\ 0 & \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} & 0 & -\sin \varphi_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_{12} & 0 & \cos \varphi_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_{12} \\ -\cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11} \\ \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{12} \end{pmatrix}.$$

Подставим найденные плюккерovy координаты в уравнение скоростей первой кинематической цепи (4.39):

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \varphi_{12} \\ 0 & \cos \varphi_{11} & \cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11} \\ 0 & -\sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} \cdot \cos \varphi_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \\ \omega_{13} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

и исследуем матрицу, составленную из плюккерovyх координат. Найдем значение угла φ_{12} , при котором определитель матрицы становится равным нулю. Определи-

тель матрицы не зависит от угла φ_{11} , а определяется углом φ_{12} . Определитель равен нулю при $\varphi_{12}=90^\circ$ и $\varphi_{12}=180^\circ$, в этом случае плоскости расположения первой и второй цепей совпадают (рис. 4.14).

Особое положение механизма определяется потерей степени свободы. Так как три кинематических пары лежат в одной плоскости, то все вращения могут происходить вокруг оси, лежащей в одной плоскости, а все вращения вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости, невозможны.

Аналогично определяются особые положения для второй и третьей кинематических цепей.

Для определения особых положений во второй кинематической цепи запишем плюккеровы координаты единичного вектора \mathbf{e}_{23} (x_{23}, y_{23}, z_{23})'. Они определяются произведением матрицы поворота выходного звена вокруг сначала первой оси oy , затем второй оси oz на координаты вектора, расположенного вдоль оси третьей пары в ее начальном положении:

$$\begin{pmatrix} x_{23} \\ y_{23} \\ z_{23} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & 0 & -\sin \varphi_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_{21} & 0 & \cos \varphi_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_{22} & -\sin \varphi_{22} & 0 \\ \sin \varphi_{22} & \cos \varphi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{22} \cdot \cos \varphi_{21} \\ \sin \varphi_{22} \\ \cos \varphi_{22} \sin \varphi_{21} \end{pmatrix}.$$

Подставим найденные плюккеровы координаты в уравнение скоростей второй цепи (4.41):

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos \varphi_{22} \cdot \cos \varphi_{21} \\ 0 & \cos \varphi_{21} & \sin \varphi_{22} \\ 0 & \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{22} \\ \omega_{23} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Для определения особых положений исследуем матрицу, составленную из плюккеровых координат. Определитель матрицы не зависит от угла φ_{21} , а определяется углом φ_{22} . Определитель равен нулю при $\varphi_{22}=90^\circ$ и $\varphi_{22}=180^\circ$, в этом случае плоскости расположения первой и второй цепей совпадают.

Для определения особых положений в третьей кинематической цепи найдем плюккеровы координаты (x_{33}, y_{33}, z_{33})' единичного вектора \mathbf{e}_{33} . Они определяются произведением матрицы поворота выходного звена вокруг: сначала первой оси oz ,

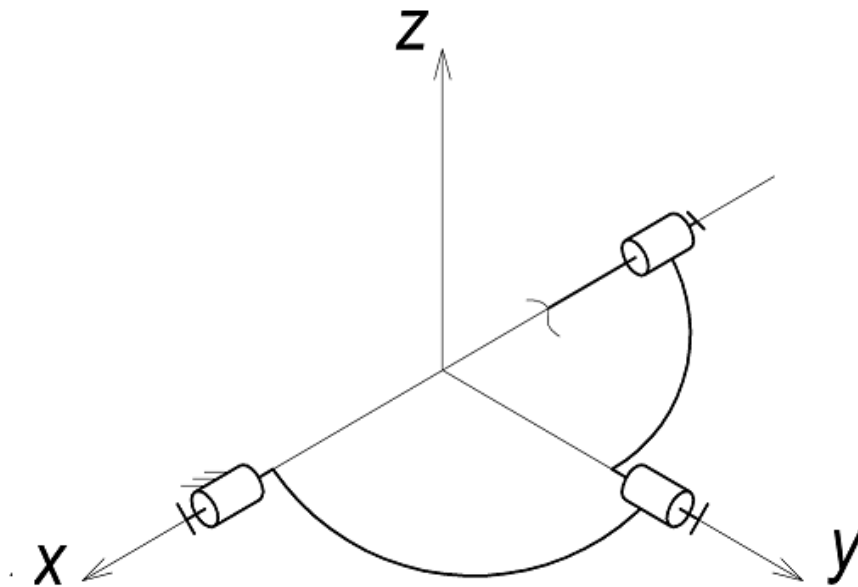
затем второй оси ox и на координаты вектора, расположенного вдоль оси третьей пары в ее начальном положении:

$$\begin{pmatrix} x_{33} \\ y_{33} \\ z_{33} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} & -\sin \varphi_{31} & 0 \\ \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{32} & -\sin \varphi_{32} \\ 0 & \sin \varphi_{32} & \cos \varphi_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_{32} \sin \varphi_{31} \\ \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} \\ \sin \varphi_{32} \end{pmatrix}.$$

Подставим найденные плюккерovy координаты в уравнение скоростей третьей цепи (4.43).

Матрица, составленная из плюккерovyх координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cos \varphi_{31} & -\cos \varphi_{32} \cdot \sin \varphi_{31} \\ 0 & \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} \\ 1 & 0 & \sin \varphi_{32} \end{pmatrix}.$$



**Рис. 4.14. Особое положение
в первой кинематической цепи**

Определитель матрицы не зависит от угла φ_{31} , а определяется углом φ_{32} . Определитель равен нулю при $\varphi_{32}=90^\circ$ и $\varphi_{32}=180^\circ$, в этом случае плоскости расположения первой и второй цепей совпадают.

Для определения особых положений механизма, связанное с потерей управляемости, необходимо исследовать систему уравнений (4.45) для трех кинематических цепей.

Для первой кинематической цепи координаты моментной части силового винта имеют следующие значения:

$$r_{1x}^0 = \cos \varphi_{12}; \quad r_{1y}^0 = \sin \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12}; \quad r_{1z}^0 = \cos \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12}.$$

Для второй и третьей кинематических цепей моментные части координат силовых винтов определяются как:

$$r_{2x}^0 = -\cos \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22}; \quad r_{2y}^0 = -\cos \varphi_{22}; \quad r_{2z}^0 = -\sin \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22};$$

$$r_{3x}^0 = -\sin \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32}; \quad r_{3y}^0 = \cos \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32}; \quad r_{3z}^0 = \cos \varphi_{32}.$$

Составим матрицу \mathbf{R} из моментной части плюккеровых координат силовых винтов:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{1x}^0 & r_{1y}^0 & r_{1z}^0 \\ r_{2x}^0 & r_{2y}^0 & r_{2z}^0 \\ r_{3x}^0 & r_{3y}^0 & r_{3z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} & -\cos \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22} & -\sin \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32} \\ \sin \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12} & -\cos \varphi_{22} & \cos \varphi_{31} \cdot \sin \varphi_{32} \\ \cos \varphi_{11} \cdot \sin \varphi_{12} & -\sin \varphi_{21} \cdot \sin \varphi_{22} & \cos \varphi_{32} \end{pmatrix}.$$

Матрица, составленная из плюккеровых координат вырождается, т.е. определитель матрицы равен нулю при следующих комбинациях значений углов:

- 1) $\varphi_{12}=0^\circ, \varphi_{22}=90^\circ, \varphi_{32}=90^\circ;$
- 2) $\varphi_{12}=90^\circ, \varphi_{22}=90^\circ, \varphi_{32}=0^\circ;$
- 3) $\varphi_{12}=90^\circ, \varphi_{22}=0^\circ, \varphi_{32}=90^\circ;$
- 4) $\varphi_{12}=90^\circ, \varphi_{22}=90^\circ, \varphi_{32}=0^\circ;$
- 5) $\varphi_{12}=90^\circ, \varphi_{22}=0^\circ, \varphi_{32}=90^\circ.$

Это соответствует таким положениям, в которых плоскости имеют хотя бы две параллельные нормали (рис. 4.15)

Потеря управляемости манипулятора определяется тем, что три силовых винта стали компланарны, т.е. параллельны одной плоскости, и вращение вокруг вектора, перпендикулярного силовым винтам, становится неуправляемым.

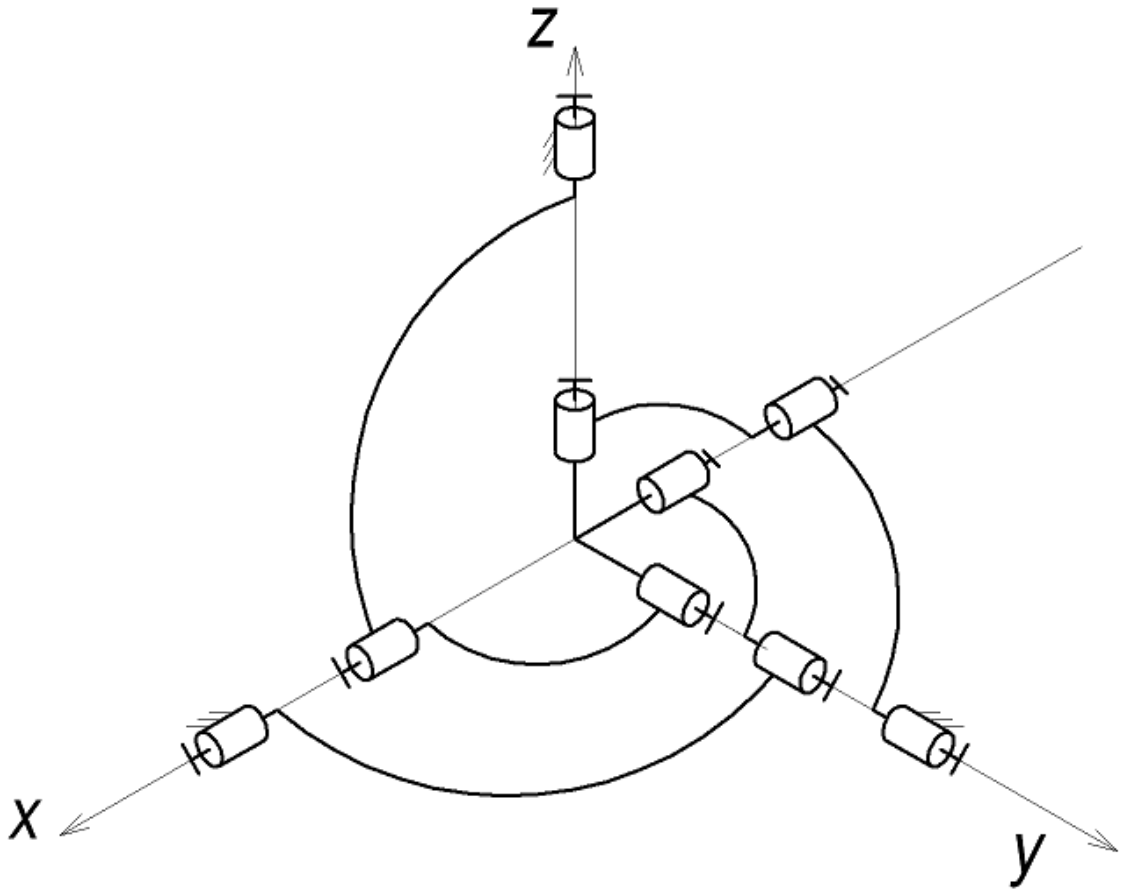


Рис.4.15. Особое положение сферического манипулятора, в котором плоскости имеют хотя бы две параллельные нормали

4.4. Решение задачи об ускорении

Рассмотрим задачу об ускорениях, которая может иметь значение при анализе динамики механизма [119]. Дифференцируя уравнения связей (4.10) по t , получаем систему уравнений, связывающих скорости входных и выходных звеньев:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \dot{\gamma} + \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} \dot{\varphi}_{11} &= 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \dot{\gamma} + \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} \dot{\varphi}_{21} &= 0 \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial F_3}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \dot{\gamma} + \frac{\partial F_3}{\partial \varphi_{31}} \dot{\varphi}_{31} &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Дифференцируя уравнения (4.48) второй раз по t , получаем уравнения связывающие ускорения входных и выходных звеньев:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha^2} \ddot{\alpha} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha \partial \beta} \ddot{\beta} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha \partial \gamma} \ddot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha \partial \varphi_{i1}} \ddot{\varphi}_{i1} \right) \ddot{\alpha} + \frac{\partial F_i}{\partial \alpha} \ddot{\alpha} + \\
& + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha \partial \beta} \ddot{\alpha} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \beta^2} \ddot{\beta} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \beta \partial \gamma} \ddot{\gamma} + \frac{\partial F_i}{\partial \beta \partial \varphi_{i1}} \ddot{\varphi}_{i1} \right) \ddot{\beta} + \\
& + \frac{\partial F_i}{\partial \beta} \ddot{\beta} + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha \partial \gamma} \ddot{\alpha} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \beta \partial \gamma} \ddot{\beta} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \gamma^2} \ddot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \gamma \partial \varphi_{i1}} \ddot{\varphi}_{i1} \right) \ddot{\gamma} + \frac{\partial F_i}{\partial \gamma} \ddot{\gamma} + \\
& + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \alpha \partial \varphi_{i1}} \ddot{\alpha} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \beta \partial \varphi_{i1}} \ddot{\beta} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \gamma \partial \varphi_{i1}} \ddot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial \varphi_{i1}^2} \ddot{\varphi}_{i1} \right) \ddot{\varphi}_{i1} + \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_{i1}} \ddot{\varphi}_{i1} = 0
\end{aligned} \tag{4.49}$$

После упрощения получаем уравнение ускорений:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha^2} \ddot{\alpha}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial \beta} \ddot{\alpha} \ddot{\beta} + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial \gamma} \ddot{\alpha} \ddot{\gamma} + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial \varphi_{i1}} \ddot{\alpha} \ddot{\varphi}_{i1} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \beta^2} \ddot{\beta}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \beta \partial \gamma} \ddot{\beta} \ddot{\gamma} + \\
& + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \beta \partial \varphi_{i1}} \ddot{\beta} \ddot{\varphi}_{i1} + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \gamma \partial \varphi_{i1}} \ddot{\gamma} \ddot{\varphi}_{i1} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \gamma^2} \ddot{\gamma}^2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi_{i1}^2} \ddot{\varphi}_{i1}^2 + \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \ddot{\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \ddot{\beta} + \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \ddot{\gamma} + \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{i1}} \ddot{\varphi}_{i1} = 0
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Эти уравнения (4.50) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{i1}} \ddot{\varphi}_{i1} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha^2} \ddot{\alpha}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial \beta} \ddot{\alpha} \ddot{\beta} + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha \partial \gamma} \ddot{\alpha} \ddot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \beta^2} \ddot{\beta}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial \beta \partial \gamma} \ddot{\beta} \ddot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \gamma^2} \ddot{\gamma}^2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi_{i1}^2} \ddot{\varphi}_{i1}^2 + \\
& + \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \ddot{\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \ddot{\beta} + \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \ddot{\gamma}; \\
& \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} \ddot{\varphi}_{21} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \beta^2} \ddot{\beta}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial \beta \partial \gamma} \ddot{\beta} \ddot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \gamma^2} \ddot{\gamma}^2 + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \varphi_{21}^2} \ddot{\varphi}_{21}^2 + \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \ddot{\beta} + \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \ddot{\gamma} \\
& \frac{\partial F_3}{\partial \varphi_{31}} \ddot{\varphi}_{31} = \frac{\partial^2 F_3}{\partial \alpha^2} \ddot{\alpha}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial \alpha \partial \beta} \ddot{\alpha} \ddot{\beta} + 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial \alpha \partial \gamma} \ddot{\alpha} \ddot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial \beta^2} \ddot{\beta}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_3}{\partial \beta \partial \gamma} \ddot{\beta} \ddot{\gamma} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial \gamma^2} \ddot{\gamma}^2 + \frac{\partial^2 F_3}{\partial \varphi_{31}^2} \ddot{\varphi}_{31}^2 + \\
& + \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} \ddot{\alpha} + \frac{\partial F_3}{\partial \beta} \ddot{\beta} + \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \ddot{\gamma}.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Приведем численный пример, для этого зададим закон движения выходного звена:

$$\alpha = 0,706 \cdot t^2 - 0,15 \cdot t^3; \quad \beta = 0,706 \cdot t^2 - 0,15 \cdot t^3; \quad \gamma = 0,706 \cdot t^2 - 0,15 \cdot t^3$$

Этому закону движения соответствуют значения ускорений в приводах (рис.4.16).

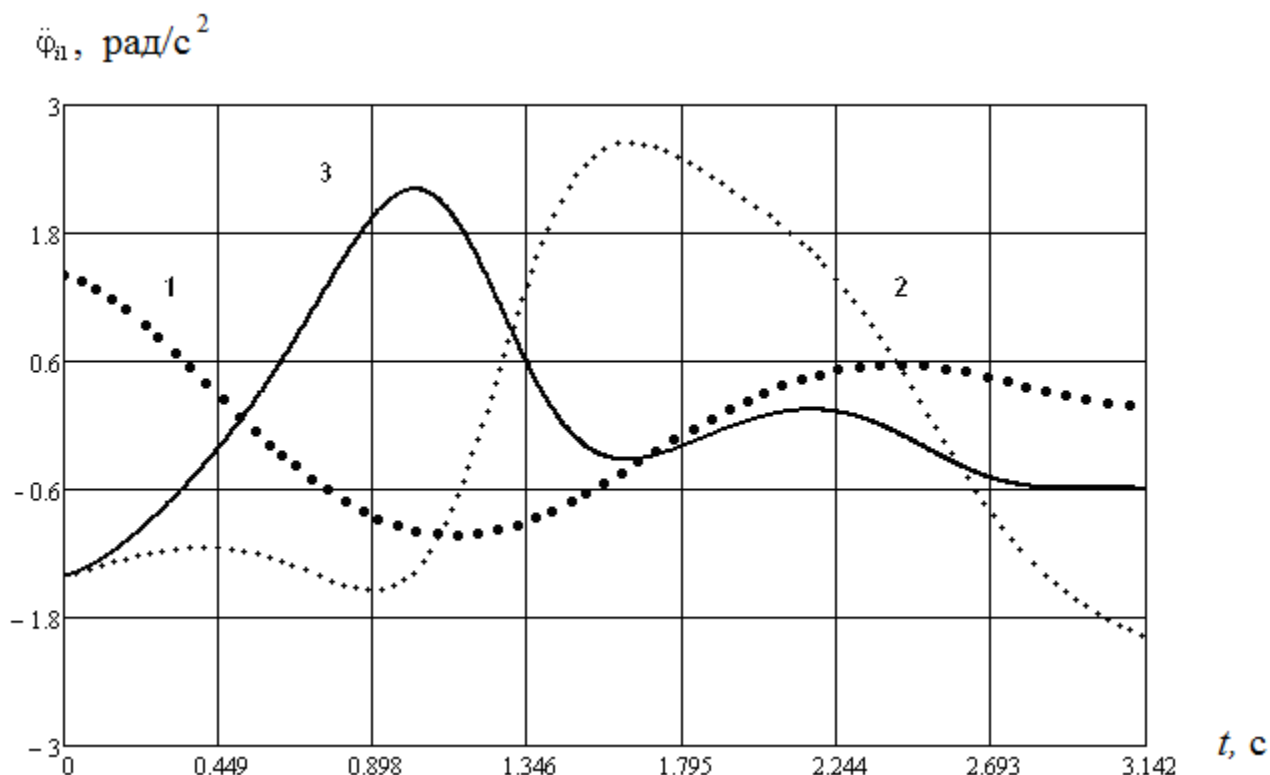


Рис. 4.16 График ускорений входных звеньев

$$(1 - \ddot{\varphi}_{12}, 2 - \ddot{\varphi}_{21}, 3 - \ddot{\varphi}_{31}).$$

Таким образом, полученные уравнения ускорений в дальнейшем можно использовать для решения задач динамики и управления.

4.5. Кинематическая точность сферического механизма

Применимость сферических механизмов определяется точность положения исполнительного звена. Многозвенность, взаимовлияние приводов усложняет решение задач определения задач точности функционирования механизма. Погрешность позиционирования зависит от многих составляющих. В данном параграфе рассмотрено решение задачи геометрической точности сферического механизма.

На положение выходного звена в сферическом механизме влияние отклонения угловых размеров механизма от заданных. Решение задачи о положении определяет взаимосвязь между входными и выходными координатами.

В общем виде задача о положении задается в виде неявных функций:

$$F_i = (\alpha, \beta, \gamma, \theta_{i1}, \theta_{i2}, \varphi_{i1}) \quad (4.52)$$

где θ_{i1} , θ_{i2} – угол между осями кинематических пар (рис.4.17).

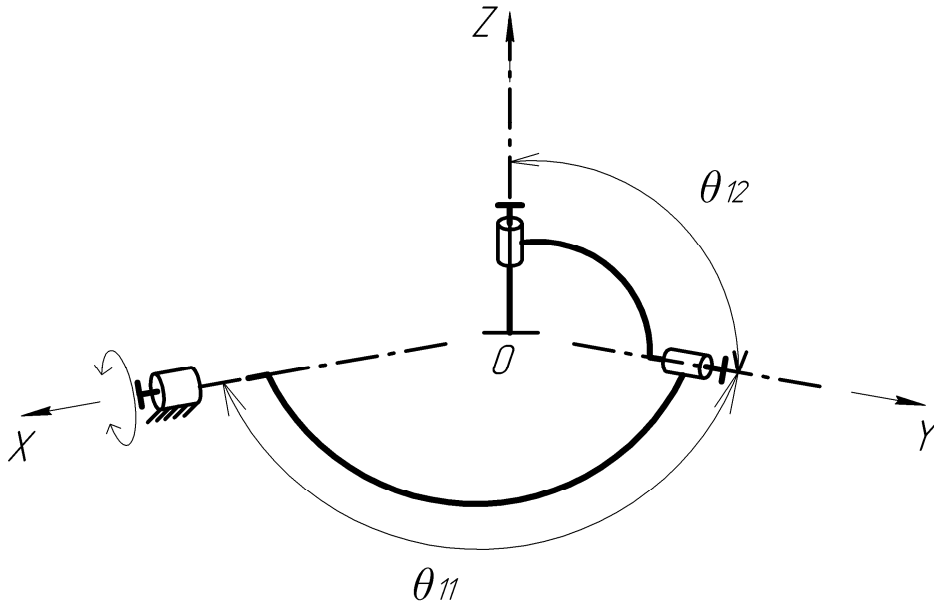


Рис. 4.17 Углы между осями кинематических пар θ_{11} , θ_{22} в первой кинематической цепи

Полный дифференциал функции (4.51) можно записать в виде:

$$\frac{\partial F_i}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F_i}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial F_i}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial F_i}{\partial \theta_{i1}} \delta \theta_{i1} + \frac{\partial F_i}{\partial \theta_{i2}} \delta \theta_{i2} + \frac{\partial F_i}{\partial \varphi_{i1}} \delta \varphi_{i1} = 0 \quad (4.53)$$

Согласно линейной теории точности приращение в приводах равно нулю, $\delta \varphi_{11} = \delta \varphi_{21} = \delta \varphi_{31} = 0$. Уравнения (4.53) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \delta \gamma &= - \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta_{12}} \delta \theta_{12} + \frac{\partial F_1}{\partial \theta_{11}} \delta \theta_{11} \right); \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \delta \gamma &= - \left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_{22}} \delta \theta_{22} + \frac{\partial F_2}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \right) \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F_3}{\partial \beta} \delta \beta + \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \delta \gamma &= - \left(\frac{\partial F_3}{\partial \theta_{32}} \delta \theta_{32} + \frac{\partial F_3}{\partial \theta_{31}} \delta \theta_{31} \right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

В рассматриваемом механизме углы между осями кинематических пар θ_{i1} , θ_{i2} не равны 90° . Последовательность поворотов выходного звена от подвижно системы координат к неподвижной представлена на рис. 4.18.

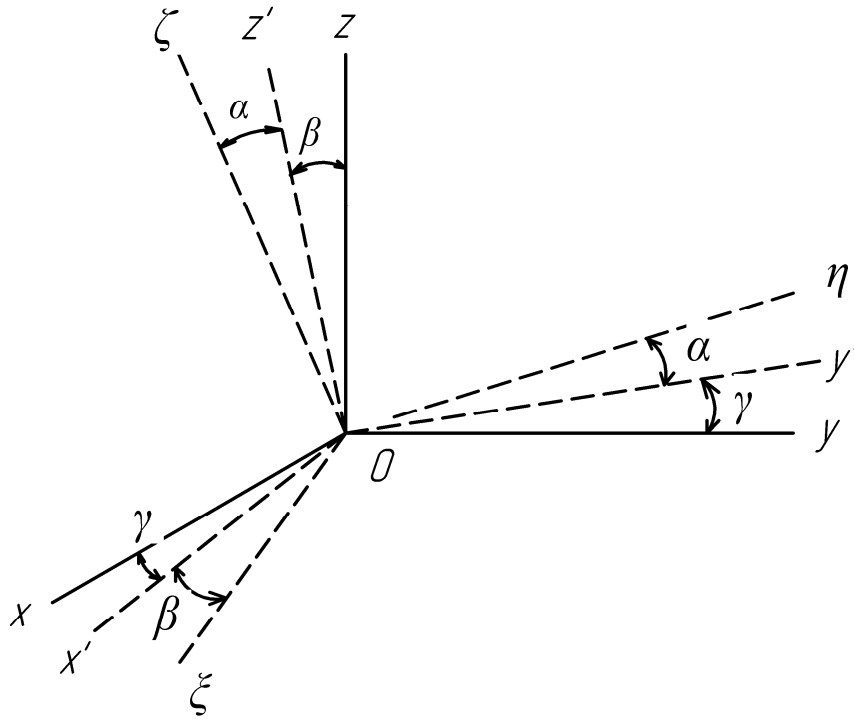


Рис.4.18 Последовательность поворотов выходного звена

Матрица перехода от подвижной системы координат к неподвижной будет иметь вид:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{F}_z \cdot \mathbf{F}_x \cdot \mathbf{B}'_x \cdot \mathbf{C}'_y \cdot \mathbf{B}'_y \cdot \mathbf{C}'_x \cdot \mathbf{B}'_z \quad (4.55)$$

где $\mathbf{B}'_x = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{11} & -\sin \varphi_{11} & 0 \\ \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}'_y = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{12} & -\sin \varphi_{12} & 0 \\ \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$\mathbf{B}'_z = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{13} & -\sin \varphi_{13} & 0 \\ \sin \varphi_{13} & \cos \varphi_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрицы поворотов первой, второй и третьей кинематических пар вокруг подвижной оси z на углы φ_{11} , φ_{12} , φ_{13} соответственно;

матрицы поворотов вокруг неподвижной оси z на углы φ_{11} , φ_{12} , φ_{13} соответственно;

$\mathbf{C}'_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{11} & -\sin \theta_{11} \\ 0 & \sin \theta_{11} & \cos \theta_{11} \end{pmatrix}$; $\mathbf{C}'_y = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & 0 & -\sin \theta_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_{12} & 0 & \cos \theta_{12} \end{pmatrix}$ – матрицы поворотов вокруг осей x , y на углы θ_{11} , θ_{12} соответственно; θ_{11} , θ_{12} – углы между соседними парами;

углы θ_{11} , θ_{12} соответственно; θ_{11} , θ_{12} – углы между соседними парами;

$$\mathbf{F}'_z = \begin{pmatrix} \cos\xi_{12} & \sin\xi_{12} & 0 \\ -\sin\xi_{12} & \cos\xi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{F}'_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\xi_{11} & \sin\xi_{11} \\ 0 & -\sin\xi_{11} & \cos\xi_{11} \end{pmatrix} \text{— матрицы дополнительных}$$

поворотов для совмещения подвижной и неподвижной системы координат вокруг осей z, x на углы ξ_{11}, ξ_{12} соответственно, причем $\xi_{11}=90^0, \xi_{12}=90^0$.

Единичный вектор оси пары выходного звена первой цепи имеет координаты

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Подставив в уравнение связи } \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ найденные значения матриц}$$

\mathbf{A} и \mathbf{B}' , получаем уравнение:

$$\begin{pmatrix} \sin\gamma \cdot \sin\alpha + \cos\alpha \cdot \cos\gamma \cdot \sin\beta \\ \cos\alpha \cdot \sin\gamma \cdot \sin\beta - \cos\gamma \cdot \sin\alpha \\ \cos\beta \cdot \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{12}\cos\theta_{11} + \sin\theta_{12}\sin\theta_{11}\sin\theta_{12} \\ \cos\varphi_{11}\cos\theta_{12}\sin\theta_{11} - \sin\theta_{12}(\cos\varphi_{12}\sin\varphi_{11} + \cos\varphi_{11}\cos\theta_{11}\sin\theta_{12}) \\ \sin\theta_{12}(\cos\varphi_{11} \cdot \cos\varphi_{12} - \cos\theta_{11}\sin\varphi_{11}\sin\varphi_{12}) + \cos\theta_{12}\sin\varphi_{11}\sin\theta_{11} \end{pmatrix}$$

Для второй кинематической цепи матрица перехода от подвижной системы координат к неподвижной будет иметь вид:

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{F}_x \cdot \mathbf{F}_y \cdot \mathbf{B}_y'' \cdot \mathbf{C}_z'' \cdot \mathbf{B}_z'' \cdot \mathbf{C}_y'' \cdot \mathbf{B}_x'' \quad (4.56)$$

$$\text{где } \mathbf{B}_y'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{21} & -\sin\varphi_{21} \\ 0 & \sin\varphi_{21} & \cos\varphi_{21} \end{pmatrix}; \mathbf{B}_z'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{22} & -\sin\varphi_{22} \\ 0 & \sin\varphi_{22} & \cos\varphi_{22} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}_x'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{21} & -\sin\varphi_{21} \\ 0 & \sin\varphi_{21} & \cos\varphi_{21} \end{pmatrix} \text{— матрицы поворотов первой, второй и третьей ки-}$$

нематических пар вокруг подвижной оси x на углы $\varphi_{21}, \varphi_{22}, \varphi_{23}$ соответственно;

$$\mathbf{C}'_z = \begin{pmatrix} \cos\theta_{22} & -\sin\theta_{22} & 0 \\ \cos\theta_{22} & \sin\theta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}'_y = \begin{pmatrix} \cos\theta_{21} & 0 & \sin\theta_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_{21} & 0 & \cos\varphi_{12} \end{pmatrix} \text{— матрицы поворотов во-}$$

круг осей z, y на углы θ_{22}, θ_{21} соответственно; θ_{21}, θ_{22} — углы между соседними па-рами;

$$\mathbf{F}_y'' = \begin{pmatrix} \cos \xi_{22} & 0 & \sin \xi_{22} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \xi_{22} & 0 & \cos \xi_{22} \end{pmatrix}; \mathbf{F}_x'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi_{21} & \sin \xi_{21} \\ 0 & -\sin \xi_{21} & \cos \xi_{21} \end{pmatrix} - \text{матрицы дополнительных}$$

поворотов для совмещения подвижной и неподвижной системы координат вокруг осей z, x на углы ξ_{22}, ξ_{21} соответственно, причем $\xi_{21}=90^0, \xi_{22}=90^0$.

Для третьей кинематической цепи матрица перехода от подвижной системы координат к неподвижной будет иметь вид:

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{F}_y''' \cdot \mathbf{F}_z''' \cdot \mathbf{B}_z''' \cdot \mathbf{C}_x''' \cdot \mathbf{B}_x''' \cdot \mathbf{C}_z''' \cdot \mathbf{B}_y''' \quad (4.57)$$

$$\mathbf{B}_z''' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} & 0 & \sin \varphi_{31} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{31} & 0 & \cos \varphi_{31} \end{pmatrix}; \mathbf{B}_y''' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{32} & 0 & \sin \varphi_{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{32} & 0 & \cos \varphi_{32} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}_x''' = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{33} & 0 & \sin \varphi_{33} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{33} & 0 & \cos \varphi_{33} \end{pmatrix} - \text{матрицы поворотов первой, второй и третьей ки-}$$

нематических пар вокруг подвижной оси y на углы $\varphi_{31}, \varphi_{32}, \varphi_{33}$ соответственно;

$$\mathbf{C}_z''' = \begin{pmatrix} \cos \theta_{31} & -\sin \theta_{31} & 0 \\ \cos \theta_{31} & \sin \theta_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_x''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{32} & \sin \theta_{32} \\ 0 & -\sin \theta_{32} & \cos \theta_{32} \end{pmatrix} - \text{матрицы поворотов во-}$$

круг осей z, x на углы θ_{31}, θ_{32} соответственно; θ_{31}, θ_{32} – углы между соседними па-рами;

$$\mathbf{F}_y''' = \begin{pmatrix} \cos \xi_{32} & 0 & -\sin \xi_{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \xi_{32} & 0 & \cos \xi_{32} \end{pmatrix}; \mathbf{F}_z''' = \begin{pmatrix} \cos \xi_{31} & \sin \xi_{31} & 0 \\ -\sin \xi_{31} & \cos \xi_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{матрицы дополнитель-}$$

ных поворотов для совмещения подвижной и неподвижной системы координат вокруг осей z, x на углы ξ_{31}, ξ_{32} соответственно причем $\xi_{31}=90^0, \xi_{32}=90^0$.

Функция положения F_1 будет иметь вид:

$$F_1 = \frac{\cos \alpha \sin \gamma \sin \beta - \cos \gamma \sin \alpha}{\cos \beta \cos \alpha} - \frac{\cos \varphi_{11} \cos \theta_{12} \sin \theta_{11} - \sin \theta_{12} (\cos \varphi_{12} \sin \varphi_{11} + \cos \varphi_{11} \cos \theta_{11} \sin \theta_{12})}{\sin \theta_{12} (\cos \varphi_{11} \cos \varphi_{12} - \cos \theta_{11} \sin \varphi_{11} \sin \varphi_{12}) + \cos \theta_{12} \sin \varphi_{11} \sin \theta_{11}}$$

$$\begin{aligned}
F_2 &= \frac{-\sin \beta}{\cos \gamma \cos \beta} - \\
&\frac{\cos \varphi_{21} \cos \theta_{21} \sin \theta_{22} - \sin \theta_{21} (\cos \varphi_{22} \sin \varphi_{21} + \cos \varphi_{21} \cos \theta_{22} \sin \varphi_{22})}{\sin \theta_{21} (\cos \varphi_{21} \cos \varphi_{22} - \cos \theta_{22} \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{22}) + \cos \theta_{21} \sin \varphi_{21} \sin \theta_{22}}; \\
F_3 &= \frac{\cos \gamma \sin \beta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \gamma}{\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha} - \\
&\frac{\cos \varphi_{31} \cos \theta_{31} \sin \theta_{32} - \sin \theta_{31} (\cos \varphi_{32} \sin \varphi_{31} + \cos \varphi_{31} \cos \theta_{32} \sin \theta_{32})}{\sin \theta_{31} (\cos \varphi_{31} \cos \varphi_{32} - \cos \theta_{32} \sin \varphi_{31} \sin \varphi_{32}) + \cos \theta_{31} \sin \varphi_{31} \sin \theta_{32}};
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Частные производные будут равны:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial \theta_{11}} &= -\frac{\cos \varphi_{11} \cos \theta_{11} \cos \theta_{12} + \cos \varphi_{11} \sin \varphi_{12} \sin \theta_{11} \sin \theta_{12}}{\sin \theta_{12} (\cos \varphi_{11} \cos \varphi_{12} - \cos \theta_{11} \sin \varphi_{11} \sin \varphi_{12}) + \cos \theta_{12} \sin \varphi_{12} \sin \theta_{11}} - \\
&\frac{(\cos \theta_{11} \cos \theta_{12} \sin \varphi_{11} + \sin \varphi_{11} \sin \varphi_{12} \sin \theta_{11} \sin \theta_{12})}{(\sin \theta_{12} (\cos \varphi_{11} \cos \varphi_{12} - \cos \theta_{11} \sin \varphi_{11} \sin \varphi_{12}) + \cos \theta_{12} \sin \varphi_{11} \sin \theta_{11})^2} \times \\
&\times (\sin \theta_{12} (\cos \varphi_{12} \sin \varphi_{12} + \cos \varphi_{11} \cos \theta_{11} \sin \varphi_{12}) - \cos \varphi_{11} \cos \theta_{12} \sin \theta_{11}) \\
\frac{\partial F_1}{\partial \theta_{12}} &= -\frac{\cos \theta_{12} (\cos \varphi_{21} \sin \varphi_{12} + \cos \varphi_{11} \cos \theta_{11} \sin \varphi_{12}) + \cos \varphi_{11} \sin \theta_{11} \sin \theta_{12}}{\sin \theta_{12} (\cos \varphi_{11} \cos \varphi_{12} - \cos \theta_{11} \sin \varphi_{11} \sin \varphi_{12}) + \cos \theta_{12} \sin \varphi_{12} \sin \theta_{11}} - \\
&\frac{\sin \theta_{12} (\cos \theta_{12} \sin \varphi_{11} + \cos \varphi_{11} \sin \varphi_{12} \cos \theta_{11}) - \cos \varphi_{11} \cos \theta_{12} \sin \theta_{11}}{(\sin \theta_{12} (\cos \varphi_{11} \cos \varphi_{12} - \cos \theta_{11} \sin \varphi_{11} \sin \varphi_{12}) + \cos \theta_{12} \sin \varphi_{11} \sin \theta_{11})^2} \times \\
&\times (\cos \theta_{12} (\cos \varphi_{11} \cos \varphi_{12} - \sin \varphi_{11} \cos \theta_{11} \sin \varphi_{12}) - \sin \varphi_{11} \sin \theta_{12} \sin \theta_{11}) \\
\frac{\partial F_2}{\partial \theta_{21}} &= -\frac{\cos \theta_{21} (\cos \varphi_{22} \sin \varphi_{21} + \cos \varphi_{21} \cos \theta_{22} \sin \varphi_{22}) + \cos \varphi_{21} \sin \theta_{21} \sin \theta_{22}}{\sin \theta_{21} (\cos \varphi_{21} \cos \varphi_{22} - \cos \theta_{22} \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{22}) + \cos \theta_{21} \sin \varphi_{21} \sin \theta_{22}} - \\
&\frac{\sin \theta_{21} (\cos \varphi_{22} \sin \varphi_{21} + \cos \varphi_{21} \sin \theta_{22} \sin \varphi_{22}) - \cos \varphi_{21} \cos \theta_{21} \sin \theta_{22}}{(\sin \theta_{21} (\cos \varphi_{21} \cos \varphi_{22} - \cos \theta_{22} \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{22}) + \cos \theta_{21} \sin \varphi_{21} \sin \theta_{22})^2} \times \\
&\times (\cos \theta_{21} (\cos \varphi_{21} \cos \varphi_{22} - \sin \varphi_{22} \cos \theta_{22} \sin \varphi_{21}) - \sin \varphi_{21} \sin \theta_{21} \sin \theta_{22}) \\
\frac{\partial F_2}{\partial \theta_{22}} &= \frac{(\cos \varphi_{21} \cos \theta_{21} \cos \theta_{22} + \cos \varphi_{21} \sin \theta_{22} \sin \varphi_{22} \sin \theta_{21})}{\sin \theta_{21} (\cos \varphi_{21} \cos \varphi_{22} - \cos \theta_{22} \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{22}) + \cos \theta_{21} \sin \varphi_{21} \sin \theta_{22}} - \\
&\frac{(\cos \theta_{21} \sin \varphi_{21} \cos \theta_{22} + \sin \varphi_{21} \sin \theta_{21} \sin \theta_{22} \sin \varphi_{22})}{(\sin \theta_{21} (\cos \varphi_{21} \cos \varphi_{22} - \cos \theta_{22} \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{22}) + \cos \theta_{21} \sin \varphi_{21} \sin \theta_{22})^2} \times \\
&\times (\sin \theta_{21} (\cos \varphi_{22} \sin \varphi_{21} + \cos \varphi_{21} \cos \theta_{22} \sin \varphi_{22}) - \cos \varphi_{21} \cos \theta_{21} \sin \theta_{22})
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \theta_{31}} = - \frac{\cos \theta_{31} (\cos \varphi_{32} \sin \varphi_{31} + \cos \varphi_{31} \cos \theta_{32} \sin \varphi_{32}) + \cos \varphi_{31} \sin \theta_{31} \sin \theta_{32}}{\sin \theta_{31} (\cos \varphi_{31} \cos \varphi_{32} - \cos \theta_{32} \sin \varphi_{31} \sin \varphi_{32}) + \cos \theta_{31} \sin \varphi_{31} \sin \theta_{32}} -$$

$$- \frac{\sin \theta_{31} (\cos \varphi_{32} \sin \varphi_{31} + \cos \varphi_{31} \cos \theta_{32} \sin \varphi_{32}) - \cos \varphi_{31} \cos \theta_{31} \sin \theta_{32}}{(\sin \theta_{31} (\cos \varphi_{31} \cos \varphi_{32} - \cos \theta_{32} \sin \varphi_{31} \sin \varphi_{32}) + \cos \theta_{31} \sin \varphi_{31} \sin \theta_{32})^2} \times$$

$$\times (\cos \theta_{31} (\cos \varphi_{31} \cos \varphi_{32} - \sin \varphi_{32} \cos \theta_{32} \sin \varphi_{31}) - \sin \varphi_{31} \sin \theta_{31} \sin \theta_{32})$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \theta_{32}} = \frac{(\cos \varphi_{31} \cos \theta_{31} \cos \theta_{32} + \cos \varphi_{31} \sin \theta_{32} \sin \theta_{31} \sin \varphi_{32})}{\sin \theta_{31} (\cos \varphi_{31} \cos \varphi_{32} - \cos \theta_{32} \sin \varphi_{31} \sin \varphi_{32}) + \cos \theta_{31} \sin \varphi_{31} \sin \theta_{32}} -$$

$$- \frac{(\cos \theta_{32} \cos \theta_{31} \sin \varphi_{31} + \sin \varphi_{31} \sin \theta_{31} \cos \theta_{32} \sin \varphi_{32})}{(\sin \theta_{31} (\cos \varphi_{31} \cos \varphi_{32} - \cos \theta_{32} \sin \varphi_{31} \sin \varphi_{32}) + \cos \theta_{31} \sin \varphi_{31} \sin \theta_{32})^2} \times$$

$$\times (\sin \theta_{31} (\cos \varphi_{32} \sin \varphi_{31} + \sin \varphi_{32} \cos \theta_{32} \cos \varphi_{31}) - \cos \varphi_{31} \cos \theta_{31} \sin \theta_{32})$$

Значения остальных частных производных известны из решения задачи о положении. Определим ошибку положения выходного звена в различных положениях при отклонениях углов между осями равными $\theta_{11} = \theta_{12} = \theta_{21} = \theta_{22} = \theta_{31} = \theta_{32} = 0,5^\circ$. Отклонения углов выходного звена выражаются из уравнения (4.42):

$$\delta \alpha = \frac{\frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} W_3 - \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} W_2 - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_2}{\partial \beta} W_3 + \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_3}{\partial \beta} W_2 + \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} W_1 - \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \frac{\partial F_3}{\partial \beta} W_1}{\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} - \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \frac{\partial F_3}{\partial \beta} - \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} + \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_3}{\partial \beta} - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \frac{\partial F_3}{\partial \alpha}};$$

$$\delta \beta = \frac{\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} W_3 - \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} W_2 - \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} W_3 + \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} W_1 + \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} W_1 - \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} W_1}{\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} - \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \frac{\partial F_3}{\partial \beta} - \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} + \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_3}{\partial \beta} - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \frac{\partial F_3}{\partial \alpha}}; \quad (4.59)$$

$$\delta \alpha = \frac{\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \beta} W_3 - \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \frac{\partial F_3}{\partial \beta} W_2 - \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} W_3 + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} W_2 + \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \frac{\partial F_3}{\partial \chi} W_1 - \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} W_1}{\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} - \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \frac{\partial F_3}{\partial \beta} - \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} + \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_3}{\partial \beta} - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \frac{\partial F_3}{\partial \alpha}};$$

$$\text{где } W_1 = - \left(\frac{\partial F_1}{\partial \theta_{12}} \delta \theta_{12} + \frac{\partial F_1}{\partial \theta_{11}} \delta \theta_{11} \right);$$

$$W_2 = - \left(\frac{\partial F_2}{\partial \theta_{22}} \delta \theta_{22} + \frac{\partial F_2}{\partial \theta_{21}} \delta \theta_{21} \right);$$

$$W_3 = - \left(\frac{\partial F_3}{\partial \theta_{32}} \delta \theta_{32} + \frac{\partial F_3}{\partial \theta_{31}} \delta \theta_{31} \right).$$

Рассмотрено отклонение выходного звена для различных положений. Значения отклонения координат выходного звена при заданном отклонении между осями представлено в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Значения отклонения углов выходного звена

Координаты выходного звена α, β, γ , рад	$\Delta\alpha$, град.	$\Delta\beta$, град	$\Delta\gamma$, град
5; 5; 5	0,36	0,1	0,41
10; 10; 10	0,37	0,35	0,48
20; 20; 20	0,31	0,71	0,43
30; 30; 30	0,31	0,63	0,43
35; 35; 35	0,26	0,28	0,46

Таким образом, представлено решение задачи определения кинематической точности механизма с применением линейной теории точности. Приведены примеры расчетов ошибки положения исполнительного звена.

Выводы по главе 4

1. Проведен структурно-параметрический синтез сферических механизмов с тремя степенями свободы. Синтез проведен с использованием структурных формул. Показаны примеры двух принципов построения механизмов, когда каждая цепь налагает одинаковые связи и каждая цепь налагает по одной связи (силы). Приведены примеры построения цепей с различным числом кинематических пар. На основе предложенных кинематических цепей синтезированы механизмы.
2. Синтезированы новые сферические механизмы с тремя кинематическими цепями. Получены уравнения связей. Показано, что предложенный сферический меха-

низм с пятью кинематическими парами в каждой цепи может быть в дальнейших расчетах заменен эквивалентным механизмом с тремя кинематическими парами в цепи, удобным для решения задач динамики и управления.

3. Решены прямые и обратные задачи о положении, о скоростях, об ускорениях, определены особые положения на основе уравнения связей и винтовом исчислении. Показана применимость двух методов решения.

4. Представлено решение задачи геометрической точности сферического механизма с применением линейной теории точности.

ГЛАВА 5. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

В главе рассматриваются вопросы динамического анализа плоского, поступательно-направляющего и сферического манипуляционных механизмов параллельной структуры. Показана методика определения собственных частот механизмов параллельной структуры, выявлен динамический критерий особых положений. Представлено решение задачи о нелинейных колебаниях.

5.1. Собственные частоты колебаний механизмов параллельной структуры

В параграфе предложен аналитический метод и алгоритм для определения собственных частот колебаний манипулятора параллельной структуры [37, 126].

Обеспечение устойчивости равновесия и несущей способности манипуляторов параллельной структуры является одной из важнейших задач, решаемых при проектировании грузоподъемных механизмов данного класса. Теории колебаний посвящено значительное количество монографий [8, 12, 13]. В то же время в литературе практически отсутствуют работы по исследованию устойчивости и колебаний манипуляторов параллельной структуры. Собственные колебания происходят в изолированной системе после внешнего воздействия или, например, после окончания процесса позиционирования, которые вызываются упругими деформациями. Характер колебательного процесса определяется только внутренними силами системы, зависящими от её физического строения. Внешние силы весьма разнообразны по своей природе. Источниками возникновения внешней силы могут быть инерционные эффекты, притяжение электромагнитов, кратковременный

импульс (удар) и т.п. В некоторых случаях возмущающие силы представляют случайный процесс (сейсмические нагрузки, волнение, качка корабля и т.п.).

Рассмотрим плоский механизм с тремя степенями свободы (рис.2.10) с координатами точек O, A_1, A_2, A_3 подвижной платформы соответственно $(0; 0), (0; -1), (\frac{\sqrt{3}}{2}; 0,5), (-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0,5)$; координаты точек соответственно B_1, B_2, B_3 $(0; -2), (\sqrt{3}; 1), (-\sqrt{3}; 1)$.

Формой уравнений движения являются уравнения Лагранжа [8]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (5.1)$$

где T - кинетическая энергия системы; Π - потенциальная энергия системы.

Потенциальная энергия системы определяется как:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i \cdot q_i^2 \quad (5.2)$$

где c_i – жесткость цепи.

Кинетическая энергия является квадратичной функцией обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\phi}^2 \quad (5.3)$$

где m - масса; J - момент инерции выходного звена.

Уравнения движения манипулятора с тремя степенями свободы будет описываться системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_3} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial q_3} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Выразим выходные скорости через обобщенные скорости:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{q}_1 \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_1} + \dot{q}_2 \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_2} + \dot{q}_3 \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta_3}; \\
\dot{y} &= \dot{q}_1 \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_1} + \dot{q}_2 \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_2} + \dot{q}_3 \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta_3}; \\
\dot{\phi} &= \dot{q}_1 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1} + \dot{q}_2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta_2} + \dot{q}_3 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \theta_3}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Коэффициенты, стоящие при обобщенных скоростях, определяются из задачи о положениях. Рассмотрим положение манипулятора (рис.2.10) с расположением точек C_1, C_2, C_3 соответственно с координатами (1,413; -1,5), (0,592; 1,975); (-2,006; -0,474).

Выходные и входные скорости связаны между собой соотношением

$$(\mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = (-\mathbf{B}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Умножим левую и правую части уравнения (5.6) на матрицу \mathbf{A}^{-1} , обратную матрице \mathbf{A} :

$$(\mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^{-1}) \cdot (-\mathbf{B}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

или упростив уравнение получаем зависимость:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^{-1}) \cdot (-\mathbf{B}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

Для исходного положения задачи матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2,828 & 1 & -2,828 \\ 0,548 & -2,95 & -2,829 \\ 2,282 & 1,949 & -2,829 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2,828 & 0 & 0 \\ 0 & -2,829 & 0 \\ 0 & 0 & -2,829 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица \mathbf{A}^{-1} будет имеет вид:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -0,209 & 0,040 & 0,168 \\ 0,074 & -0,218 & 0,144 \\ -0,117 & -0,117 & -0,117 \end{pmatrix},$$

а произведение матриц \mathbf{A}^{-1} и \mathbf{B} будет равно:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,592 & -0,114 & -0,477 \\ -0,210 & 0,618 & -0,408 \\ 0,333 & 0,333 & 0,333 \end{pmatrix}.$$

Выразим значения скоростей из уравнения (5.8):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{q}_1 \cdot 0,592 + \dot{q}_2 \cdot (-0,114) + \dot{q}_3 \cdot (-0,477); \\ \dot{y} &= \dot{q}_1 \cdot (-0,210) + \dot{q}_2 \cdot 0,618 + \dot{q}_3 \cdot (-0,408) \\ \dot{\phi} &= \dot{q}_1 \cdot 0,333 + \dot{q}_2 \cdot 0,333 + \dot{q}_3 \cdot 0,333. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Запишем уравнение (5.3) кинетической энергии в виде:

$$\begin{aligned} T &= \frac{(0,33 \cdot \dot{q}_1 + 0,33 \cdot \dot{q}_2 + 0,33 \cdot \dot{q}_3)^2}{80} + \\ &+ \frac{(0,618 \cdot \dot{q}_2 - 0,408 \cdot \dot{q}_3 - 0,21 \cdot \dot{q}_1)^2}{4} \\ &+ \frac{(0,592 \cdot \dot{q}_1 - 0,114 \cdot \dot{q}_2 - 0,477 \cdot \dot{q}_3)^2}{4}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Частные производные уравнения (5.4) равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= 0,2 \cdot \dot{q}_1 - 0,096 \cdot \dot{q}_2 - 0,096 \cdot \dot{q}_3; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= -0,096 \cdot \dot{q}_1 + 0,2 \cdot \dot{q}_2 - 0,096 \cdot \dot{q}_3 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} &= -0,096 \cdot \dot{q}_1 - 0,096 \cdot \dot{q}_2 + 0,2 \cdot \dot{q}_3 \end{aligned} \quad (5.11)$$

После дифференцирования выражения (5.11) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= 0,2 \cdot \ddot{q}_1 - 0,096 \cdot \ddot{q}_2 - 0,096 \cdot \ddot{q}_3 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= -0,096 \cdot \ddot{q}_1 + 0,2 \cdot \ddot{q}_2 - 0,096 \cdot \ddot{q}_3 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} &= -0,096 \cdot \ddot{q}_1 - 0,096 \cdot \ddot{q}_2 + 0,2 \cdot \ddot{q}_3 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} &= c_1 \cdot q_1, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = c_2 \cdot q_2, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_3} = c_3 \cdot q_3\end{aligned}\tag{5.12}$$

Дифференциальное уравнение движения (5.4) имеет вид:

$$\begin{aligned}0,2 \cdot \ddot{q}_1 - 0,096 \cdot \ddot{q}_2 - 0,096 \cdot \ddot{q}_3 &= -c_1 q_1 \\ -0,096 \cdot \ddot{q}_1 + 0,2 \cdot \ddot{q}_2 - 0,096 \cdot \ddot{q}_3 &= -c_2 q_2 \\ -0,096 \cdot \ddot{q}_1 - 0,096 \cdot \ddot{q}_2 + 0,2 \cdot \ddot{q}_3 &= -c_3 q_3\end{aligned}\tag{5.13}$$

Система дифференциальных уравнений (5.13) имеет частное решение:

$$\begin{aligned}q_1 &= A_1 \cdot \sin \omega t; \quad \dot{q}_1 = -A_1 \cdot \omega \cdot \cos \omega t; \quad \ddot{q}_1 = -A_1 \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot \sin \omega t \\ q_2 &= A_2 \cdot \sin \omega t; \quad \dot{q}_2 = -A_2 \cdot \omega \cdot \cos \omega t; \quad \ddot{q}_2 = -A_2 \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot \sin \omega t \\ q_3 &= A_3 \cdot \sin \omega t; \quad \dot{q}_3 = -A_3 \cdot \omega \cdot \cos \omega t; \quad \ddot{q}_3 = -A_3 \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot \sin \omega t\end{aligned}\tag{5.14}$$

где A_1, A_2, A_3 – амплитуды колебаний, мм

Зададим массу выходного звена $m=0,5$ кг, момент инерции $J=0,025$ кг·м² и жесткость $c_1=c_2=c_3=1000$ Н/мм. Тогда, подставив значения частных решений и их вторые производные в дифференциальные уравнения движения (5.13) и сократив множитель $\sin \omega t$, получаем

$$\begin{cases} -A_1 \cdot (1000 - 0,2 \cdot \omega^2) - A_2 \cdot 0,096 \cdot \omega^2 - A_3 \cdot 0,096 \cdot \omega^2 = 0; \\ -A_1 \cdot 0,096 \cdot \omega^2 + A_2 \cdot (1000 - 0,2 \cdot \omega^2) - A_3 \cdot 0,096 \cdot \omega^2 = 0; \\ -A_1 \cdot 0,096 \cdot \omega^2 - A_2 \cdot 0,096 \cdot \omega^2 + A_3 \cdot (1000 - 0,2 \cdot \omega^2) = 0. \end{cases}\tag{5.15}$$

Движения возможны только в том случае, если уравнения системы (5.15) совместны друг с другом. Условием совместности уравнений является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов A_1, A_2, A_3 . Раскрыв этот оп-

ределитель, мы получаем уравнение для определения частот возможных колебаний:

$$\begin{vmatrix} 1000 - 0,2 \cdot \omega^2 & 0,096 \cdot \omega^2 & 0,096 \cdot \omega^2 \\ 0,096 \cdot \omega^2 & 1000 - 0,2 \cdot \omega^2 & -0,096 \cdot \omega^2 \\ 0,096 \cdot \omega^2 & 0,096 \cdot \omega^2 & 1000 - 0,2 \cdot \omega^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -7 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^6 + 92,3 \cdot \omega^4 - 6 \cdot 10^5 \cdot \omega^2 + 10^9$$

Круговые частоты $\omega_1=183,7$ рад/с, $\omega_2=183,8$ рад/с, $\omega_3=1118,4$ рад/с, а соответствующие им собственные частоты колебаний $\nu_1=29,3$ Гц, $\nu_2=29,3$ Гц, $\nu_3=177,1$ Гц.

Проведем численное моделирование движения манипуляционного плоского механизма на основе уравнений Даламбера-Лагранжа. Примем положение равновесия, в котором обобщенные силы (усилия в приводах) равны нулю. При перемещении из этого положения появляются упругие силы, которые пропорциональны углам поворота в приводах. Уравнения динамики с учетом массы только выходного звена имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_x \\ m\ddot{y} &= -F_y \\ J\ddot{\phi} &= -M_z \end{aligned} \quad (5.16)$$

где m – масса;

\ddot{x}, \ddot{y} – ускорения центра масс;

J – момент инерции выходного звена;

$\ddot{\phi}$ – угловое ускорение выходного звена;

F_x, F_y – проекция внешней силы на оси x, y , приложенная к выходному звену;

M_z – момент, приложенный к выходному звену.

На входные звенья механизма действуют крутящие моменты двигателя (обобщенные силы). Крутящие моменты (обобщенные силы), действующие на входные звенья, будут определяться по формуле:

$$M_i = -c_i \cdot \Delta q_i \quad (5.17)$$

где c_i – жесткость привод,

Δq_i – отклонения в приводах, мм.

Необходимо определить скорости и ускорения выходного звена в определенном положении.

Для решения данной задачи используем принцип возможных перемещений. Система из трех уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\delta x + M_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} \delta x + M_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} \delta x + M_3 \frac{\partial q_3}{\partial x} \delta x &= 0 \\ m\ddot{y}\delta y + M_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} \delta y + M_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} \delta y + M_3 \frac{\partial q_3}{\partial y} \delta y &= 0 \\ J\ddot{\varphi}\delta\varphi + M_1 \frac{\partial q_1}{\partial \varphi} \delta\varphi + M_2 \frac{\partial q_2}{\partial \varphi} \delta\varphi + M_3 \frac{\partial q_3}{\partial \varphi} \delta\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

где: δx , δy , $\delta\varphi$ – элементарные перемещение вдоль осей x , y и вокруг z , мм;

m – масса выходного звена, кг;

M_1 , M_2 , M_3 – крутящие моменты двигателей, действующие на начальные звенья, Н·м.

После преобразования уравнения (5.18) примут вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{M_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} + M_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} + M_3 \frac{\partial q_3}{\partial x}}{m}; \\ \ddot{y} &= \frac{M_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} + M_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} + M_3 \frac{\partial q_3}{\partial y}}{m} \\ \ddot{z} &= \frac{M_1 \frac{\partial q_1}{\partial \varphi} + M_2 \frac{\partial q_2}{\partial \varphi} + M_3 \frac{\partial q_3}{\partial \varphi}}{J} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Уравнения содержат частные производные уравнений связей (2.9):

$$\frac{\partial q_i}{\partial x} = \frac{\partial F_i / \partial x}{\partial F_i / \partial q_i}; \quad \frac{\partial q_i}{\partial y} = \frac{\partial F_i / \partial y}{\partial F_i / \partial q_i}; \quad \frac{\partial q_i}{\partial \varphi} = \frac{\partial F_i / \partial \varphi}{\partial F_i / \partial q_i}$$

Рассмотрим положение манипулятора с координатами входных звеньев $q_1=0,34$ рад; $q_2=2,43$ рад; $q_3=-1,75$ рад и координатами выходных звеньев $x=0$; $y=0$; $\varphi=0$. (рис.2.4). Матрицы **A** и **B** имеют следующие значения:

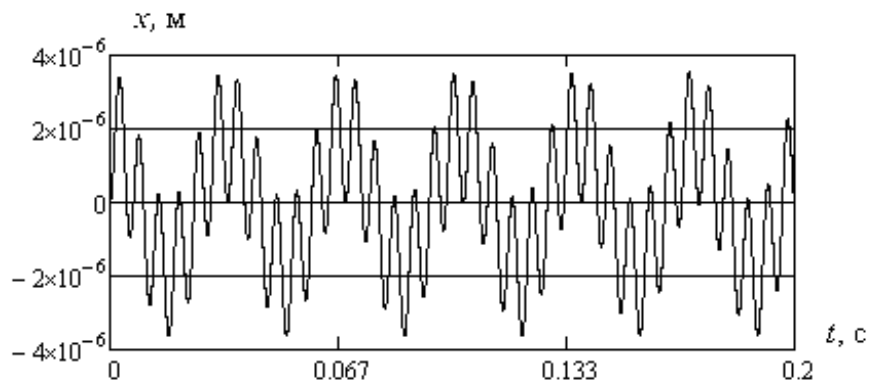
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2,828 & 1 & -2,828 \\ 0,548 & -2,95 & -2,829 \\ 2,282 & 1,949 & -2,829 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2,828 & 0 & 0 \\ 0 & -2,829 & 0 \\ 0 & 0 & -2,829 \end{pmatrix}.$$

Для данного положения значения частных производных равны:

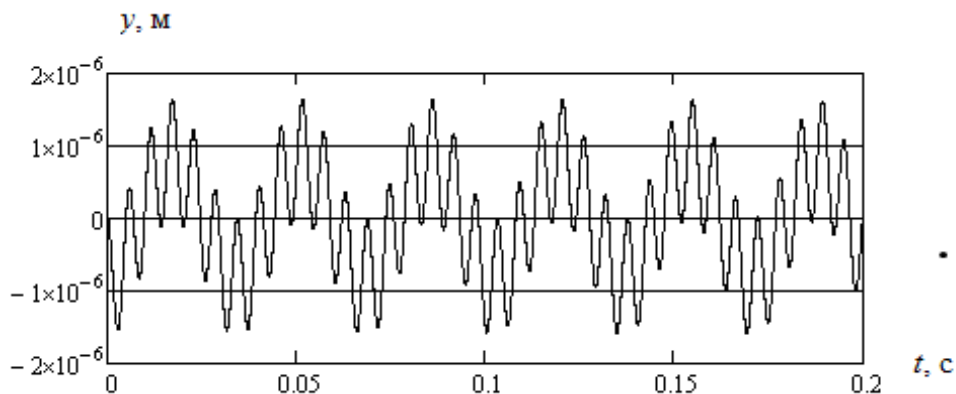
$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial x} = \frac{\partial F_1 / \partial x}{\partial F_1 / \partial q_1} = 1; & \quad \frac{\partial q_1}{\partial y} = \frac{\partial F_1 / \partial y}{\partial F_1 / \partial q_1} = -0,353; & \quad \frac{\partial q_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial F_1 / \partial \varphi}{\partial F_1 / \partial q_1} = 1 \\ \frac{\partial q_2}{\partial x} = \frac{\partial F_2 / \partial x}{\partial F_2 / \partial q_2} = -0,153; & \quad \frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{\partial F_2 / \partial y}{\partial F_2 / \partial q_2} = 1,042; & \quad \frac{\partial q_2}{\partial \varphi} = \frac{\partial F_2 / \partial \varphi}{\partial F_2 / \partial q_2} = 1 \\ \frac{\partial q_3}{\partial x} = \frac{\partial F_3 / \partial x}{\partial F_3 / \partial q_3} = -0,806; & \quad \frac{\partial q_3}{\partial y} = \frac{\partial F_3 / \partial y}{\partial F_3 / \partial q_3} = -0,686; & \quad \frac{\partial q_3}{\partial \varphi} = \frac{\partial F_3 / \partial \varphi}{\partial F_3 / \partial q_3} = 1. \end{aligned}$$

Поскольку колебания считаются малыми, то можно линеаризовать уравнения колебаний.

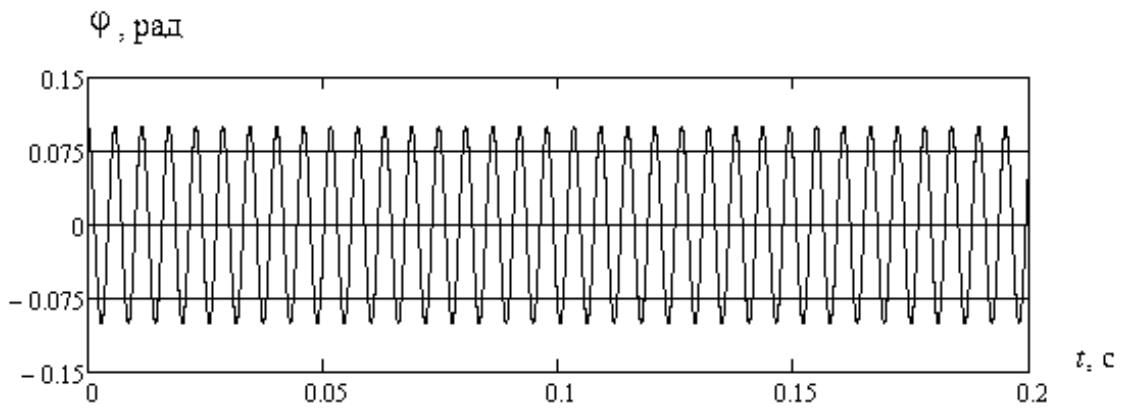
Дадим выходному звену малое колебание вокруг оси z на угол $\varphi=0,1$. В результате численного решения получаем значения частот колебаний координат (x , y , φ): $\nu_1=30$ Гц, $\nu_2=30$ Гц, $\nu_3=175$ Гц (рис.5.1 а, б, в)



а)

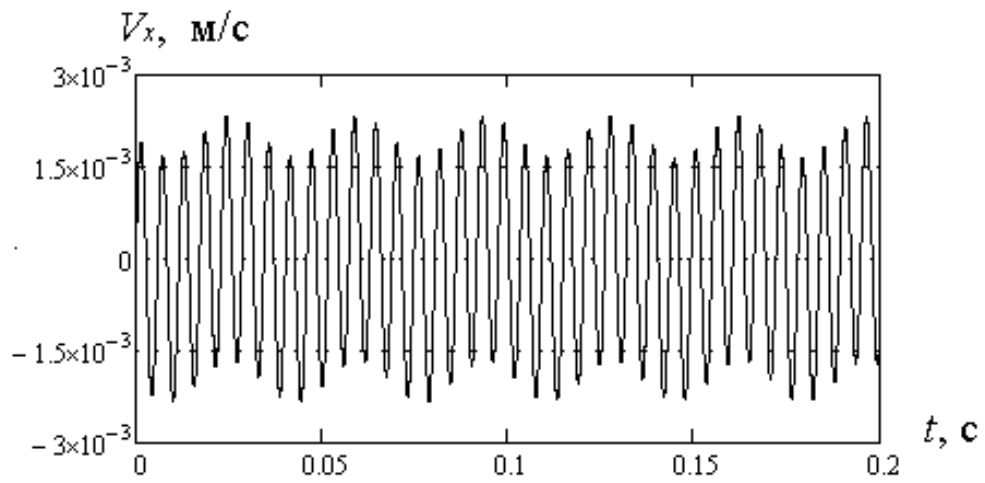


б)

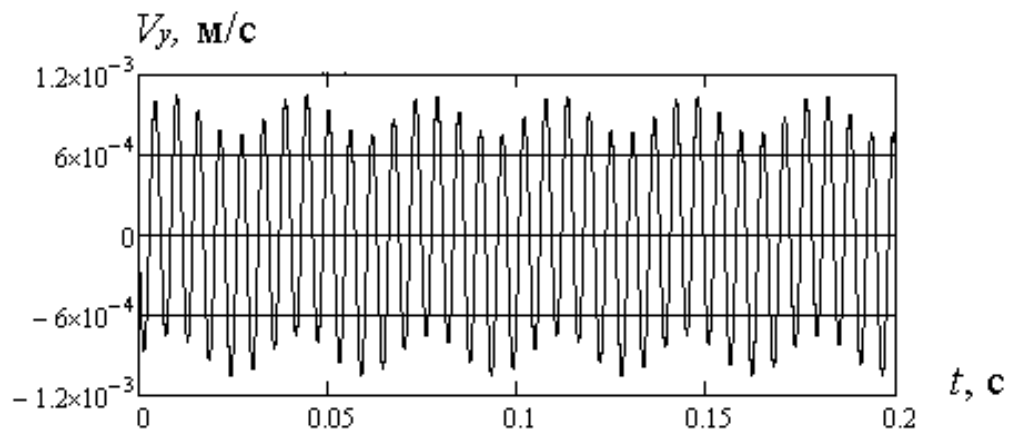


в)

и соответствующие им частота и амплитуда скоростей (V_x , V_y , ω) (рис.5.1 г, д, е)



г)



д)

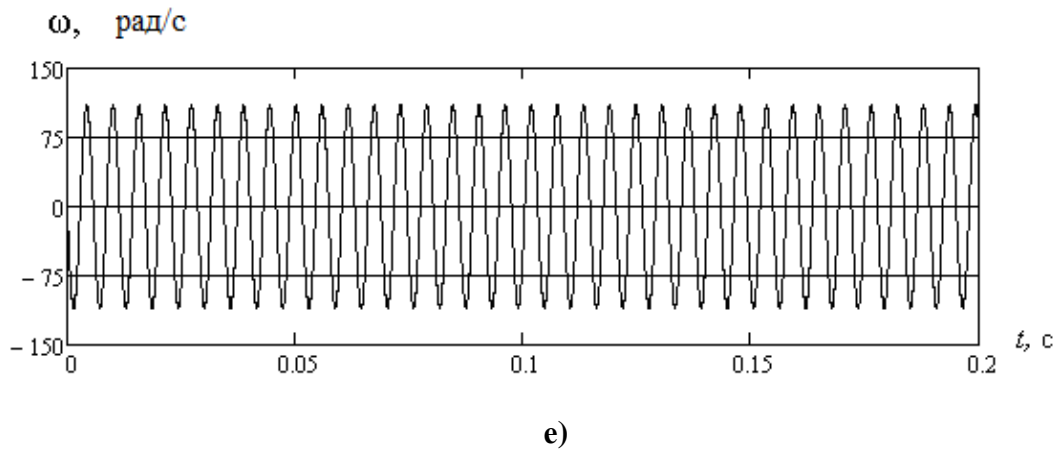


Рис. 5.1 Графики изменения

а, б, в – координат x, y, φ

г, д, е – скоростей V_x, V_y, ω

Так, значения частоты собственных колебаний, полученные аналитическим путем совпадают с численными значениями.

Теперь рассмотрим поступательно-направляющий механизм (рис.3.9), где входными координатами являются координаты входных звеньев x_{B1}, y_{B2}, z_{B3} .

Формой уравнений движения являются уравнения Лагранжа (5.1), в котором обозначим через q_i обобщенные координаты (x_{B1}, y_{B2}, z_{B3}) , а \dot{q}_i обобщенные скорости $(V_{11}; V_{21}; V_{31})$.

Кинетическая энергия является квадратичной функцией обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \quad (5.20)$$

где m — масса выходного звена, кг

Уравнения движения манипулятора с тремя степенями свободы будет описываться системой дифференциальных уравнений (5.4).

Выходные и входные скорости связаны между собой соотношением:

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = (-\mathbf{B}) \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} – матрицы частных производных, полученных из уравнения (3.22).

Умножив левую и правую части уравнения на матрицу \mathbf{A}^{-1} , обратную матрице \mathbf{A} , после упрощения уравнения (5.21) имеем:

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (-\mathbf{B}) \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Рассмотрим положение манипулятора с координатами точки $O(0,5; 0,5; 0,5)$ и длинами звеньев $l_1=1$ м, $l_2=1$ м, $l_3=1$ м.

Для данного положения манипулятора матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0,577 & 0,577 \\ 0,577 & -1 & 0,577 \\ 0,577 & 0,577 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица \mathbf{A}^{-1} будет иметь вид:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1,742 & 2,376 & 2,376 \\ 2,376 & 1,742 & 2,376 \\ 2,376 & 2,376 & 1,742 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$ будет равно:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1,742 & 2,376 & 2,376 \\ 2,376 & 1,742 & 2,376 \\ 2,376 & 2,376 & 1,742 \end{pmatrix}.$$

Решая уравнение (5.22) получаем уравнения скоростей:

$$\begin{aligned} V_x &= q_1 \cdot 1,742 + q_2 \cdot 2,376 + q_3 \cdot 2,376; \\ V_y &= q_1 \cdot 2,376 + q_2 \cdot 1,742 + q_3 \cdot 2,376; \\ V_z &= q_1 \cdot 2,376 + q_2 \cdot 2,376 + q_3 \cdot 1,742. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Частные решения системы дифференциальных уравнений (5.4) имеют вид

$$q_1 = A_1 \cdot \sin \omega t; \quad q_2 = A_2 \cdot \sin \omega t; \quad q_3 = A_3 \cdot \sin \omega t \quad (5.24)$$

где A_1, A_2, A_3 – амплитуды колебания, мм

Зададим для выходного звена массу $m=0,5$ кг и жесткость $c_1=c_2=c_3=10000$ Н/мм. Тогда, подставив значения частных решения и их вторые производные в дифференциальные уравнения движения (5.4) и сократив множитель $\sin \omega t$, получаем

$$\begin{cases} -A_1 \cdot (10000 - 7,163 \cdot \omega^2) - A_2 \cdot 6,969 \cdot \omega^2 - A_3 \cdot 6,962 \cdot \omega^2 = 0; \\ -A_1 \cdot 6,969 \cdot \omega^2 - A_2 \cdot (10000 - 7,163 \cdot \omega^2) - A_3 \cdot 6,962 \cdot \omega^2 = 0; \\ -A_1 \cdot 6,962 \cdot \omega^2 - A_2 \cdot 6,962 \cdot \omega^2 - A_3 \cdot (10000 - 7,163 \cdot \omega^2) = 0. \end{cases} \quad (5.25)$$

Движения $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ возможны только в том случае, если уравнения системы (5.25) совместны друг с другом. Условием совместности уравнений является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов A_1, A_2, A_3 . Раскрыв этот определитель, мы получаем уравнение для определения частот возможных колебаний

$$\begin{vmatrix} 10000 - 7,163 \cdot \omega^2 & -6,969 \cdot \omega^2 & -6,962 \cdot \omega^2 \\ -6,969 \cdot \omega^2 & 10000 - 7,163 \cdot \omega^2 & -6,962 \cdot \omega^2 \\ -6,962 \cdot \omega^2 & -6,962 \cdot \omega^2 & 10000 - 7,163 \cdot \omega^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -0,84 \cdot \omega^6 + 84686,41 \cdot \omega^4 - 2,14 \cdot 10^9 \cdot \omega^2 + 10^{12}.$$

Решение уравнения даёт следующие значения круговых частот: $\omega_1=21,7$ рад/с, $\omega_2=223,9$ рад/с, $\omega_3=223,9$ рад/с, которым соответствуют собственные частоты колебаний $\nu_1=3,5$ Гц, $\nu_2=35,5$ Гц, $\nu_3=35,5$ Гц.

Рассмотрим начальное положение манипулятора (см. рис.3.1), для которого матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} равны:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом положении выходные скорости связаны с входными скоростями следующими соотношениями:

$$V_x = q_1 \cdot 1; \quad V_y = q_2 \cdot 1; \quad V_z = q_3 \cdot 1.$$

Подставив значения частных решений и их вторые производные в дифференциальные уравнения движения (5.4) и сократив множитель $\sin \omega t$, получаем:

$$\begin{cases} -A_1 \cdot (10000 - 0,5 \cdot \omega^2) = 0; \\ -A_2 \cdot (10000 - 0,5 \cdot \omega^2) = 0; \\ -A_3 \cdot (10000 - 0,5 \cdot \omega^2) = 0. \end{cases} \quad (5.26)$$

Решение системы уравнений (5.26) даёт следующие значения круговых частот: $\omega_1=\omega_2=\omega_3=141,7$ рад/с, которым соответствуют собственные частоты колебаний $\nu_1=\nu_2=\nu_3=22,5$ Гц

При этом силовые винты будут иметь координаты: \mathbf{R}_1 (0,75; 0,43; -0,43), \mathbf{R}_2 (-0,43; 0,75; 0,43), \mathbf{R}_3 (0,43; -0,43; 0,75).

Рассмотрим численное моделирование движения механизма на основе уравнений Даламбера-Лагранжа Уравнение движения механизма с тремя степенями свободы имеет вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{P_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial x} + m_1 q_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} + m_2 q_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} + m_3 q_3 \frac{\partial q_3}{\partial x}}{m} \\ \ddot{y} &= \frac{P_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial y} + m_1 q_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} + m_2 q_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} + m_3 q_3 \frac{\partial q_3}{\partial y}}{m} \\ \ddot{z} &= \frac{P_1 \frac{\partial q_1}{\partial z} + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial z} + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial z} + m_1 q_1 \frac{\partial q_1}{\partial z} + m_2 q_2 \frac{\partial q_2}{\partial z} + m_3 q_3 \frac{\partial q_3}{\partial z} + mg}{m}\end{aligned}\quad (5.27)$$

где m_i – масса входных звеньев соответствующих цепей, кг;

m – масса выходного звена, кг;

\ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} – ускорения выходного звена, м/с²;

P_i – усилия в приводе, Н;

δx , δy , δz – элементарные перемещение вдоль осей x , y , z , мм;

$\frac{\partial q_i}{\partial x}$ – переменные коэффициенты, составленных из частных производных, определяемые из уравнения скоростей.

ределяемые из уравнения скоростей.

P_1 , P_2 , P_3 – силы, действующие в приводе, Н.

Силы в приводах пропорциональны его жесткости:

$$\begin{cases} P_1 = c_1 \cdot \Delta q_i \\ P_2 = c_2 \cdot \Delta q_{ii} \\ P_3 = c_3 \cdot \Delta q_i \end{cases}\quad (5.28)$$

где Δq_i – отклонения в приводах, мм.

Рассмотрим положение манипулятора с координатами входных звеньев. Рассмотрим положение манипулятора с координатами точки $O(0,5; 0,5; 0,5)$. Примем массу выходного звена $m=0,5$ кг, а жесткость приводов $c=10000$ Н/мм.

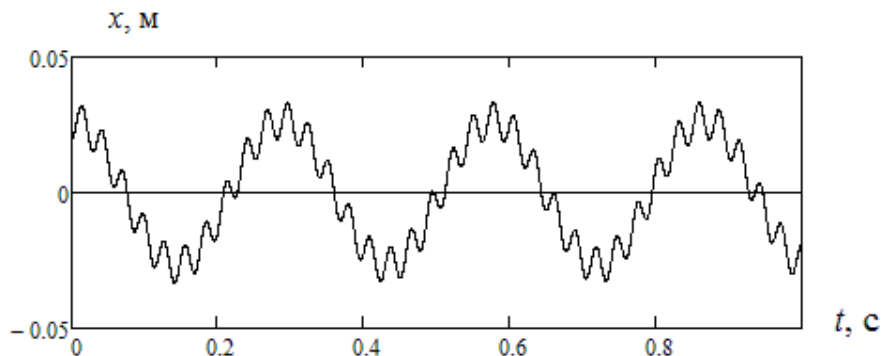
Для данного положения манипулятора матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0,577 & 0,577 \\ 0,577 & -1 & 0,577 \\ 0,577 & 0,577 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

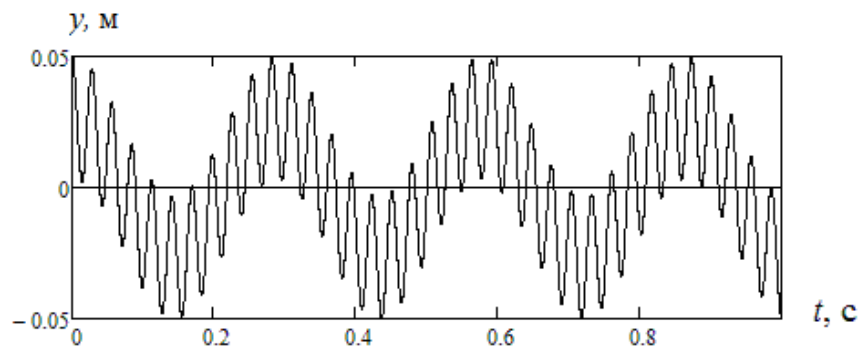
Для данного положения значения частных производных равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial x_0} = \frac{\partial F_1 / \partial x_0}{\partial F_1 / \partial q_1} = -1; & \quad \frac{\partial q_1}{\partial y_0} = \frac{\partial F_1 / \partial y_0}{\partial F_1 / \partial q_1} = 0,577; & \quad \frac{\partial q_1}{\partial z_0} = \frac{\partial F_1 / \partial z_0}{\partial F_1 / \partial q_1} = 0,577 \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_0} = \frac{\partial F_2 / \partial x_0}{\partial F_2 / \partial q_2} = 0,577; & \quad \frac{\partial q_2}{\partial y_0} = \frac{\partial F_2 / \partial y_0}{\partial F_2 / \partial q_2} = 1; & \quad \frac{\partial q_2}{\partial z_0} = \frac{\partial F_2 / \partial z_0}{\partial F_2 / \partial q_2} = 0,577 \\ \frac{\partial q_3}{\partial x_0} = \frac{\partial F_3 / \partial x_0}{\partial F_3 / \partial q_3} = 0,577; & \quad \frac{\partial q_3}{\partial y_0} = \frac{\partial F_3 / \partial y_0}{\partial F_3 / \partial q_3} = 0,577; & \quad \frac{\partial q_3}{\partial z_0} = \frac{\partial F_3 / \partial z_0}{\partial F_3 / \partial q_3} = 1. \end{aligned}$$

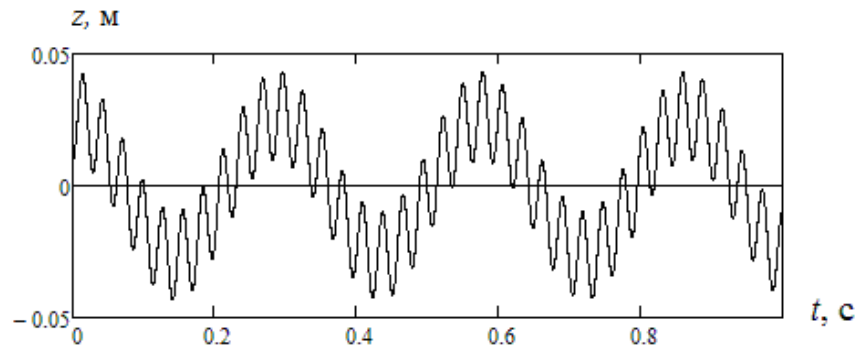
Поскольку колебания считаются малыми, то можно линеаризовать уравнения колебаний. Подставим выражения моментов (5.30) в уравнение движения (5.29). Отклоним выходное звено вдоль осей x, y, z соответственно на 0,02мм, 0,05мм, 0,01мм. В результате численного решения получаем значения частот колебаний координат (x, y, z) (рис. 5.2 а, б, в) и соответствующие им скорости (рис.5.2 г, д, е).



а)

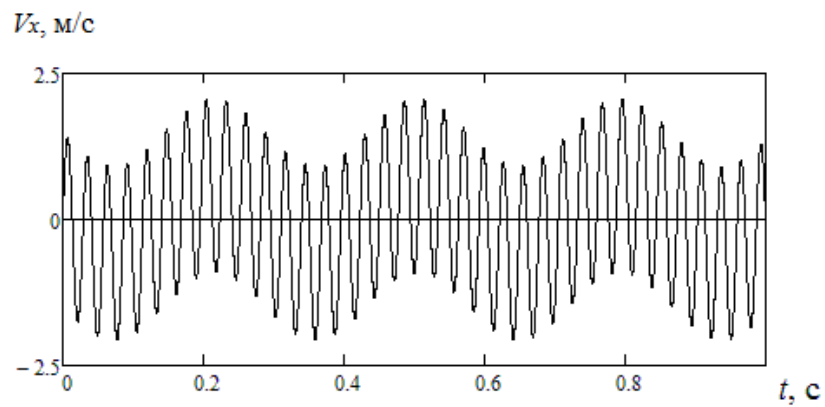


б)

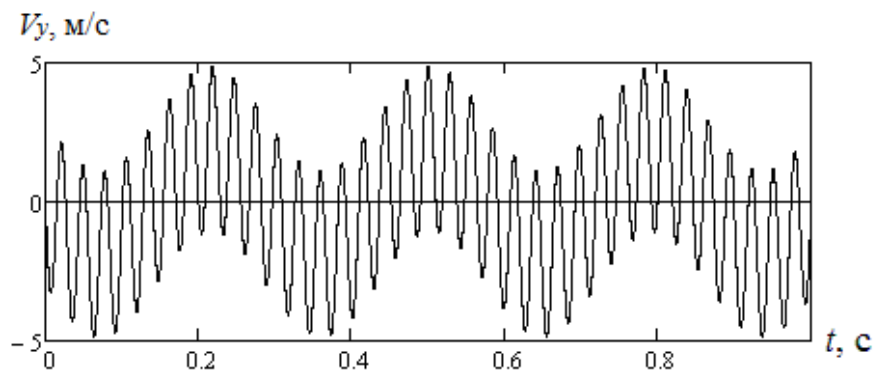


в)

в соответствующие скорости (рис. 5.2 г, д, е)



г)



д)

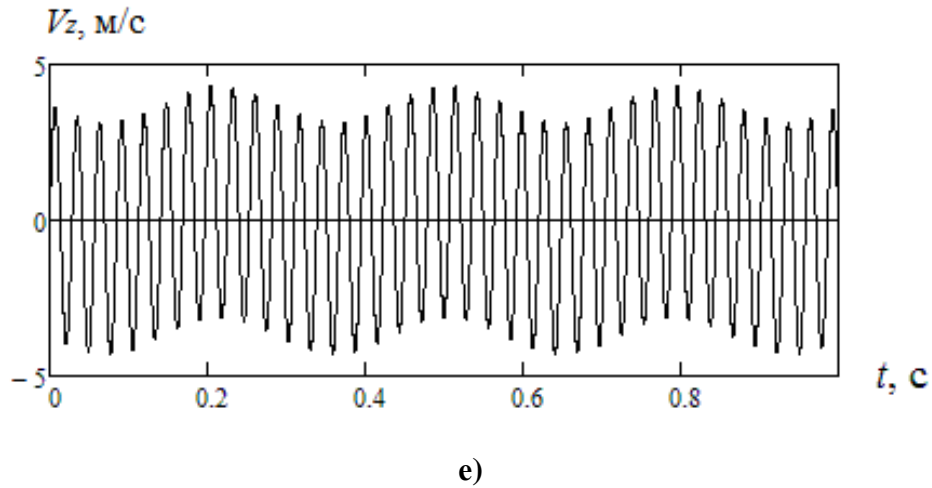


Рис. 5.2 График изменения

а, б, в – координат выходного звена, x, y, z

г, д, е – скоростей выходного звена V_x, V_y, V_z

Рассмотрим сферический манипулятор в начальном положении (рис. 4.11). Входными координатами являются углы $\Phi_{11}, \Phi_{21}, \Phi_{31}$ – соответственно углы поворота входных звеньев первой, второй и третьей кинематических цепей. Выходными координатами являются углы поворота платформы α, β, γ вокруг осей x, y, z соответственно.

Формой уравнений движения являются уравнения Лагранжа (5.1), потенциальная энергия манипулятора определяется уравнением (5.2).

Кинетическая энергия является квадратичной функцией обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \cdot J_x \cdot \omega_x^2 + \frac{1}{2} \cdot J_y \cdot \omega_y^2 + \frac{1}{2} \cdot J_z \cdot \omega_z^2 \quad (5.29)$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, – угловые скорости выходного звена вокруг осей x, y, z соответственно;

$J_x = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$; $J_y = J_z = \frac{1}{12} \cdot m \cdot r^2$ – моменты инерции выходного звена вокруг осей соответственно x, y, z , кг·мм²;

m – масса выходного звена, кг (примем $m=0,5$ кг, $r=0,1$ м);

r – радиус платформы выходного звена, м.

Тогда уравнение (5.31) примет вид:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega_x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega_y^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega_z^2 \quad (5.30)$$

Уравнения движения манипулятора с тремя степенями свободы будет описываться системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{11}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{11}} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{11}}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{21}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{21}} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{21}}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{31}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{31}} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{31}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Рассмотрим произвольное положение выходного звена манипулятора с углами $\alpha=1$ рад, $\beta=1$ рад, $\gamma=1$ рад. Такому положению соответствуют углы поворота входных звеньев: $\varphi_{11}=0,242$ рад; $\varphi_{12}=1,265$ рад; $\varphi_{21}=1,237$ рад; $\varphi_{22}=0,472$ рад; $\varphi_{31}=0,081$ рад; $\varphi_{32}=0,472$ рад. Входные и выходные скорости связаны соотношением (4.24):

$$(\mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = (-\mathbf{B}) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_{31} \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} , входящие в эти уравнения, имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3,425 & 0,456 & 3,266 \\ 0 & 6,34 & 4,489 \\ 1,067 & 0,311 & -1,006 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1,060 & 0 & 0 \\ 0 & -9,315 & 0 \\ 0 & 0 & 1,006 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица \mathbf{A}^{-1} имеет вид:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1,156 & 0,219 & 2,773 \\ 0,712 & -0,006 & 2,285 \\ -1,006 & 0,231 & -3,227 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц \mathbf{A}^{-1} и \mathbf{B} равно:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1,226 & -2,046 & -2,791 \\ 0,755 & 0,055 & 2,300 \\ -1,067 & -2,153 & -3,248 \end{pmatrix}.$$

Выразим значения скоростей из уравнения (5.32):

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\varphi}_{11} \cdot (-1,226) + \dot{\varphi}_{21} \cdot (-2,046) + \dot{\varphi}_{31} \cdot (-2,791); \\ \omega_y &= \dot{\varphi}_{11} \cdot 0,755 + \dot{\varphi}_{21} \cdot 0,055 + \dot{\varphi}_{31} \cdot 2,300; \\ \omega_z &= \dot{\varphi}_{11} \cdot (-1,067) + \dot{\varphi}_{21} \cdot (-2,153) + \dot{\varphi}_{31} \cdot (-3,248).\end{aligned}$$

Тогда частные производные уравнения (5.33) будут равны:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{11}} \right) = 0,73 \cdot \ddot{\varphi}_{11} + 1,349 \cdot \ddot{\varphi}_{21} + 2,149 \cdot \ddot{\varphi}_{31}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{21}} \right) = 1,346 \cdot \ddot{\varphi}_{11} + 2,64 \cdot \ddot{\varphi}_{21} + 3,96 \cdot \ddot{\varphi}_{31}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{31}} \right) = 2,149 \cdot \ddot{\varphi}_{11} + 3,96 \cdot \ddot{\varphi}_{21} + 6,37 \cdot \ddot{\varphi}_{31}. \end{cases} \quad (5.33)$$

Система дифференциальных уравнений (5.31) имеет частные решения:

$$\begin{aligned}\varphi_{11} &= A_1 \cdot \sin \omega t; \\ \varphi_{21} &= A_2 \cdot \sin \omega t; \\ \varphi_{31} &= A_3 \cdot \sin \omega t.\end{aligned} \quad (5.34)$$

Задав жесткости $c_1 = c_2 = c_3 = 10000$ Н·м/рад и подставив значения частных решений (5.34), а также их вторые производные в дифференциальные уравнения движения (5.33), после сокращения их на множитель $\sin \omega t$, имеем

$$\begin{cases} -A_1 \cdot (10000 - 0,73 \cdot \omega^2) - A_2 \cdot 1,349 \cdot \omega^2 - A_3 \cdot 2,149 \cdot \omega^2 = 0; \\ -A_1 \cdot 1,346 \cdot \omega^2 + A_2 \cdot (10000 - 2,64 \cdot \omega^2) - A_3 \cdot 3,96 \cdot \omega^2 = 0; \\ -A_1 \cdot 2,149 \cdot \omega^2 - A_2 \cdot 3,96 \cdot \omega^2 + A_3 \cdot (10000 - 6,37 \cdot \omega^2) = 0. \end{cases} \quad (5.35)$$

Движения возможны только в том случае, если уравнения системы (5.35) совместны друг с другом. Условием совместности уравнений является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов A_1, A_2, A_3 . Составив и раскрыв этот определитель, имеем уравнение для определения частот возможных колебаний

$$\begin{vmatrix} 10000 - 0,73 \cdot \omega^2 & -1,349 \cdot \omega^2 & -2,149 \cdot \omega^2 \\ -1,346 \cdot \omega^2 & 10000 - 2,64 \cdot \omega^2 & -3,96 \cdot \omega^2 \\ -2,149 \cdot \omega^2 & -3,96 \cdot \omega^2 & 10000 - 6,37 \cdot \omega^2 \end{vmatrix} = \\ = -46,29 \cdot 10^{-1} \cdot \omega^6 + 1280 \cdot 10^3 \cdot \omega^4 - 9,74 \cdot 10^9 \cdot \omega^2 + 10^{12}.$$

Решив уравнение, получаем значения круговых частот $\omega_1=31$ рад/с, $\omega_2=92$ рад/с, $\omega_3=110$ рад/с, которым соответствуют собственные частоты колебаний $\nu_1=5,1$ Гц, $\nu_2=14,3$ Гц, $\nu_3=17,5$ Гц.

Теперь рассмотрим положение манипулятора в начальном положении при $\alpha=0$ рад, $\beta=0$ рад, $\gamma=0$ рад. Такому положению соответствуют углы поворота входных звеньев: $\phi_{11}=0$ рад; $\phi_{12}=0$ рад; $\phi_{21}=0$ рад; $\phi_{22}=0$ рад; $\phi_{31}=0$ рад; $\phi_{32}=0$ рад (рис.5.2). Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц \mathbf{A}^{-1} и \mathbf{B} равно:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

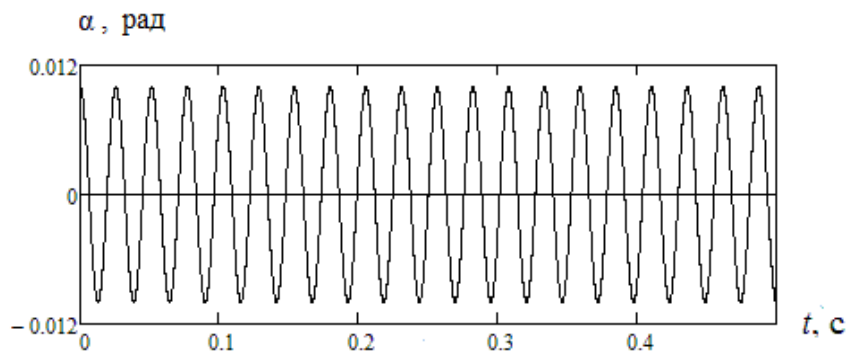
Подставив в уравнение (5.32) коэффициенты, стоящие при обобщенных скоростях: $\omega_x = \dot{\phi}_{11} \cdot (-1)$, $\omega_y = \dot{\phi}_{21} \cdot (-1)$, $\omega_z = \dot{\phi}_{31} \cdot (-1)$, имеем:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{11}} \right) = \frac{m \cdot r^2 \cdot \ddot{\phi}_{11}}{12}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{21}} \right) = \frac{m \cdot r^2 \cdot \ddot{\phi}_{21}}{12}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_{31}} \right) = \frac{m \cdot r^2 \cdot \ddot{\phi}_{31}}{2}. \end{cases} \quad (5.36)$$

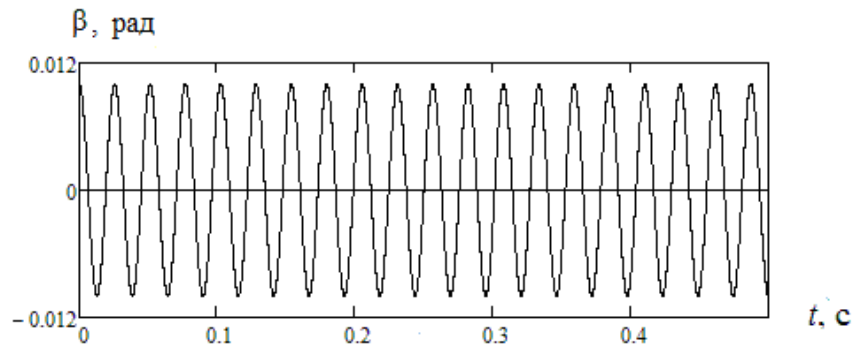
Подставив значения частных решения и их вторые производные в дифференциальные уравнения движения (5.35), после сокращения на множитель $\sin \omega t$ получаем

$$\begin{cases} A_1 \cdot (10000 - 0,083 \cdot \omega^2) = 0; \\ A_2 \cdot (10000 - 0,083 \cdot \omega^2) = 0; \\ A_3 \cdot (10000 - 0,5 \cdot \omega^2) = 0. \end{cases} \quad (5.37)$$

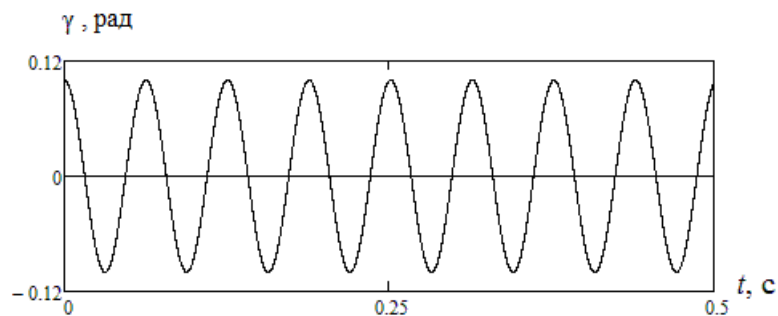
Решив уравнения (5.37), получаем значения круговых частот $\omega_1=45$ рад/с, $\omega_2=111$ рад/с, $\omega_3=111$ рад/с, которым соответствуют собственные частоты колебаний $\nu_1=7,2$ Гц, $\nu_2=17,7$ Гц, $\nu_3=17,7$ Гц (рис. 5.3 а, б, в) и соответствующие им скорости (рис. 5.3. г, д, е)



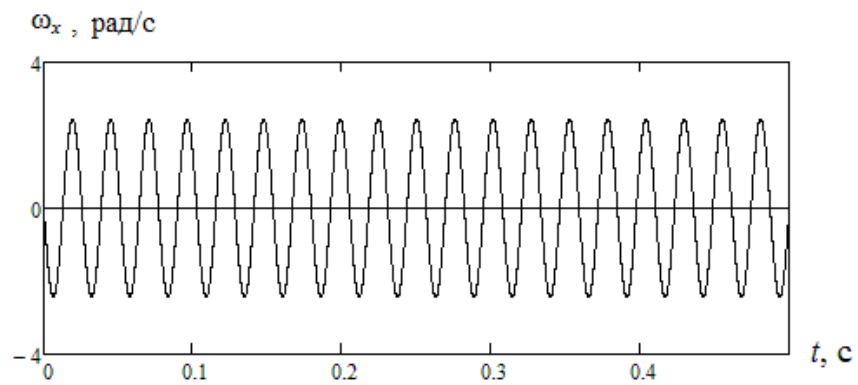
а)



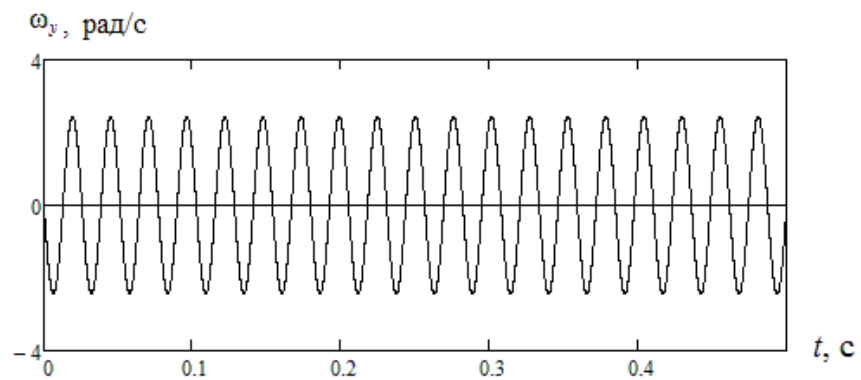
б)



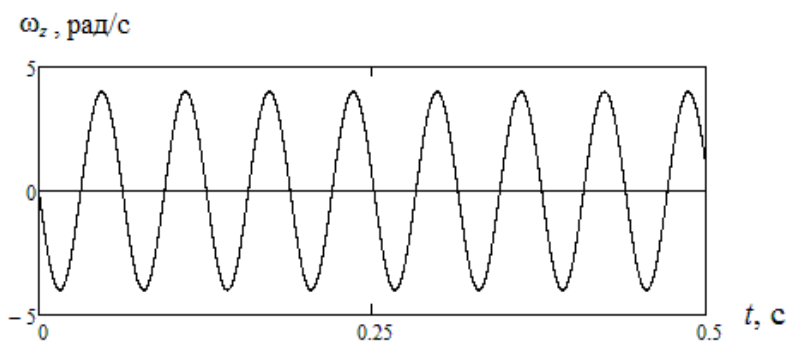
в)



г)



д)



е)

Рис. 5.3 График изменения

а, б, в – координат выходного звена α, β, γ ;

г, д, е – скоростей выходного звена $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

Таким образом, в параграфе показана методика определения собственных частот колебаний механизмов параллельной структуры с тремя степенями свободы различных классов.

5.2. Частотный критерий особых положений

В механизмах параллельной структуры могут проявляться особые положения в рабочей зоне, в которых или теряется степень свободы, или появляется неуправляемая подвижность. Вблизи особых положений у манипуляторов параллельной структуры снижается нагрузочная способность. Эти положения определяются с использованием аппарата винтового исчисления, исследованием свойств матриц Якоби, составленных из уравнений связей, а также по величине угла давления [4, 25, 26, 40, 82, 93]. Одной из задач является установление критериев положений близких к особым. В параграфе для решения данной проблемы разработан подход, основанный на анализе собственных частот колебаний манипулятора [36, 110].

Известно, что условием особого положения является вырожденность матриц, составленных из плюккеровых координат силовых винтов, или матриц Якоби, полученных дифференцированием неявной функции, а также при угле давления равном 90^0 . В параграфе показана зависимость частоты колебаний от положения манипулятора вблизи особых положения. Собственные частоты колебаний исследуются на плоском и поступательно-направляющем манипуляторах параллельной структуры.

Рассмотрим положение плоского механизма близкое к особому положению, в котором теряется управляемость механизма (рис.2.11). В особом положении входные координаты имеют значения $q_1=0^0$, $q_2=120^0$, $q_3=-120^0$. Рассмотрим положение близкое к особому с координатами $q_1=0,0005^0$, $q_2=120^0$, $q_3=-120^0$. При таком положении звеньев матрицы **A** и **B** имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1,799 & 2,398 & 0,006 \\ -1,175 & -2,759 & 0,006 \\ 2,978 & 0,361 & 0,006 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3,597 & 0 & 0 \\ 0 & -3,597 & 0 \\ 0 & 0 & -3,597 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы **A** равен 0,0143, т.е. стремится к нулю.

Выразим выходные скорости через входные скорости:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{q}_1 \cdot 0,48 + \dot{q}_2 \cdot (0,31) + \dot{q}_3 \cdot (-0,79) \\
\dot{y} &= \dot{q}_1 \cdot (-0,63) + \dot{q}_2 \cdot 0,73 + \dot{q}_3 \cdot (-0,09) \\
\dot{\phi} &= \dot{q}_1 \cdot 196,59 + \dot{q}_2 \cdot 196,59 + \dot{q}_3 \cdot 196,59
\end{aligned} \tag{5.38}$$

и подставим значения частных решений и их вторые производные в дифференциальные уравнения движения (5.4), сократив которые на множитель $\sin \omega t$, получим

$$\begin{cases} -A_1 \cdot (10000 - 966,306 \cdot \omega^2) - A_2 \cdot 966,261 \cdot \omega^2 - A_3 \cdot 966,011 \cdot \omega^2 = 0; \\ -A_1 \cdot 966,261 \cdot \omega^2 + A_2 \cdot (10000 - 966,236 \cdot \omega^2) - A_3 \cdot 966,07 \cdot \omega^2 = 0; \\ -A_1 \cdot 966,011 \cdot \omega^2 - A_2 \cdot 966,07 \cdot \omega^2 + A_3 \cdot (10000 - 966,499 \cdot \omega^2) = 0. \end{cases} \tag{5.39}$$

Раскрыв определитель матрицы, составленной из коэффициентов при A_1, A_2, A_3 , в уравнениях (5.39) получаем выражение для определения частот возможных колебаний:

$$\begin{vmatrix} 10000 - 966,306 \cdot \omega^2 & -966,261 \cdot \omega^2 & -966,011 \cdot \omega^2 \\ -966,261 \cdot \omega^2 & 10000 - 966,236 \cdot \omega^2 & -966,07 \cdot \omega^2 \\ -966,011 \cdot \omega^2 & -966,07 \cdot \omega^2 & 10000 - 966,499 \cdot \omega^2 \end{vmatrix} = \\ = -4,68 \cdot 10^3 \cdot \omega^6 + 1,35 \cdot 10^9 \cdot \omega^4 - 2,899 \cdot 10^{12} \cdot \omega^2 + 10^{12}.$$

Круговые частоты равны $\omega_1=1,83$ рад/с, $\omega_2=146,8$ рад/с, $\omega_3=1687,1$ рад/с, а соответствующие им собственные частоты колебаний – $\nu_1=0,29$ Гц, $\nu_2=23,3$ Гц, $\nu_3=269$ Гц.

Рассмотрим положение механизма, при котором определитель матрицы **B** равен нулю. При смещении центра платформы из начала координат в точку с координатами (0; 1,99) и угле поворота $\phi=0^0$ определители матриц **A** и **B** будут равны соответственно 0,06 и 4,178, что соответствует входным углам $q_1=88,521^0$, $q_2=65,260^0$, $q_3=114,739^0$.

При этом уравнения скоростей имеют вид:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 1,09 \cdot \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot (-109,77) + \dot{q}_3 \cdot 110,6; \\
\dot{y} &= \dot{q}_2 \cdot (-7,77) + \dot{q}_3 \cdot 7,77; \\
\dot{\phi} &= 1,89 \cdot \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot (-190,7) + \dot{q}_3 \cdot 189,8.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Подставив значения частных решений и их вторые производные в дифференциальные уравнения движения (3.19) и, сократив на множитель $\sin \omega t$, получаем соответствующую систему уравнений. Раскрыв определитель матрицы, составленной из коэффициентов при A_1, A_2, A_3 , получаем уравнение для определения частот возможных колебаний

$$\begin{vmatrix} 10000 - 0,683 \cdot \omega^2 & 68,84 \cdot \omega^2 & -69,237 \cdot \omega^2 \\ 68,84 \cdot \omega^2 & 10000 - 6964 \cdot \omega^2 & 7005 \cdot \omega^2 \\ -69,237 \cdot \omega^2 & 7005 \cdot \omega^2 & 10000 - 7047 \cdot \omega^2 \end{vmatrix} = \quad (5.41)$$

$$= -12,71 \cdot 10^9 \cdot \omega^6 + 5,3 \cdot 10^9 \cdot \omega^4 - 1,4 \cdot 10^{13} \cdot \omega^2 + 10^{12}.$$

Круговые частоты равны $\omega_1=0,83$ рад/с, $\omega_2=163,4$ рад/с, $\omega_3=2028,7$ рад/с, а соответствующие им собственные частоты колебаний – $\nu_1=0,13$ Гц, $\nu_2=25,5$ Гц, $\nu_3=322,3$ Гц.

При дальнейшем приближении выходного звена к особому положению в точку с координатами (0; 1,999) и угле поворота $\varphi=0^0$ матриц **A** и **B** будут равны соответственно 0,01 и 0,13, что соответствует входным углам $q_1=89,532^0$, $q_2=65,264^0$, $q_3=114,736^0$.

При этом уравнения скоростей можно записать:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1,09 \cdot \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot (-339,7) + \dot{q}_3 \cdot 340,2; \\ \dot{y} &= \dot{q}_2 \cdot (-7,77) + \dot{q}_3 \cdot 7,77; \\ \dot{\varphi} &= 1,89 \cdot \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cdot (-586,1) + \dot{q}_3 \cdot 585,1. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Подставив значения частных решений и их вторые производные в дифференциальные уравнения движения (5.4) и сократив на множитель $\sin \omega t$, получаем систему уравнений. Раскрыв определитель матрицы, составленной из коэффициентов при A_1, A_2, A_3 , получаем уравнение для определения частот возможных колебаний:

$$\begin{vmatrix} 10000 - 0,683 \cdot \omega^2 & 211,7 \cdot \omega^2 & -212,2 \cdot \omega^2 \\ 211,7 \cdot \omega^2 & 10000 - 66197 \cdot \omega^2 & 66336 \cdot \omega^2 \\ -212,2 \cdot \omega^2 & 66336 \cdot \omega^2 & 10000 - 66476 \cdot \omega^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -7,1 \cdot 10^3 \cdot \omega^6 + 1,37 \cdot 10^{10} \cdot \omega^4 - 1,32 \cdot 10^{14} \cdot \omega^2 + 10^{12}.$$

Круговые частоты равны $\omega_1=0,84$ рад/с, $\omega_2=980$ рад/с, $\omega_3=13900$ рад/с, соответствующие им собственные частоты колебаний $\nu_1=0,04$ Гц, $\nu_2=47,7$ Гц, $\nu_3=698,3$ Гц.

При смещении центра платформы из начала координат в точку с координатами (0; 1,9999) круговые частоты равны $\omega_1=0,0084$ рад/с, $\omega_2=980$ рад/с, $\omega_3=21680$ рад/с. Им соответствуют собственные частоты колебаний $\nu_1=0,0012$ Гц, $\nu_2=47,7$ Гц, $\nu_3=1090$ Гц.

Для исследования частотного критерия особых положений будем изучать окрестность сингулярности, где угол давления больше 85^0 . Указанный угол определяется коэффициентом трения. Силы, действующие внутри конуса трения не вызывают движения.

Стремление одной из частот к нулю свидетельствует о присутствии особого положения второго типа, а рост другой частоты – особое положение первого типа.

Рассмотрим поступательно-направляющий вблизи особых положений. Например, положение механизма с координатой выходного звена в точке O_1' (0,999; 0,02; 0), а особым является положение с координатами в точке O_1 (1; 0; 0) (рис.5.4). Для такого положения манипулятора определим угол давления.

Угол давления определяется как

$$\alpha = \arccos \frac{V \cdot \mathbf{R}_1}{|V| \cdot |\mathbf{R}_1|}, \quad (5.43)$$

где V – скорость последней точки в первой цепи;

\mathbf{R}_1 – силовой винт, который появляется при торможении входного звена.

Для решения задачи о скоростях определяем плюккеровы координаты четвертого силового винта, который появляется при торможении входного звена. Три момента, создаваемые тремя силами, запрещают вращение.

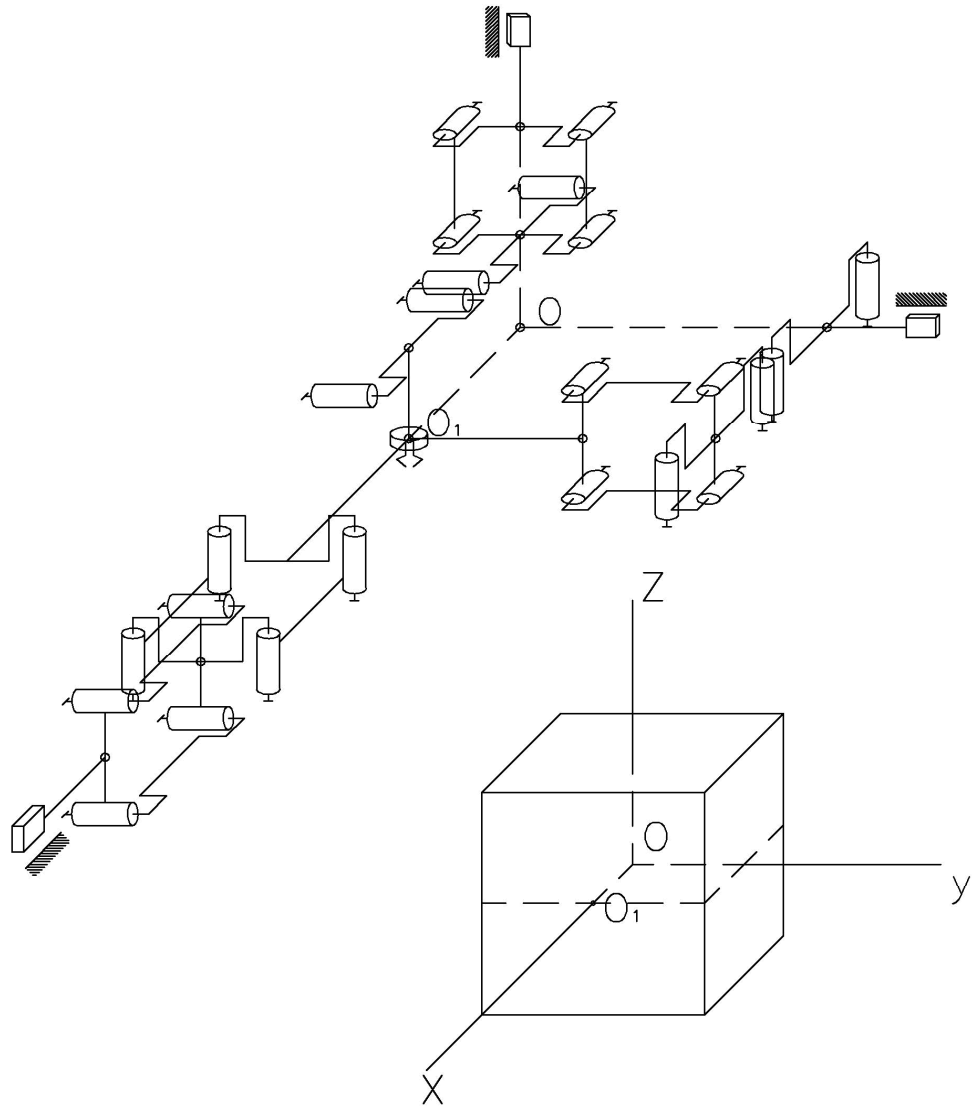


Рис. 5.4. Положение звеньев манипулятора при положении выходного звена с координатами точки $O_I (1; 0; 0)$ и положение точки O_I в рабочей зоне

Силовой винт \mathbf{R}_1 будет перпендикулярен плоскости, образованной единичными векторами \mathbf{E}_{11} и \mathbf{E}_{12} , имеет согласно уравнения (3.26) координаты:

$$r_{1x} = -\cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{11};$$

$$r_{1y} = -\sin \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{11};$$

$$r_{1z} = \cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11}.$$

Координаты вектора скорости выходного звена взаимны координатам двух силовых винтов второй цепи \mathbf{R}_2 и третьей цепи \mathbf{R}_3 и составляют:

$$\mathbf{V}_A = \begin{pmatrix} i & j & k \\ r_{2x} & r_{2y} & r_{2z} \\ r_{3x} & r_{3y} & r_{3z} \end{pmatrix}.$$

Тогда проекции скоростей на оси x , y , z будут равны::

$$\begin{aligned} V_{xA} &= r_{2y} \cdot r_{3z} - r_{2z} \cdot r_{3y}; \\ V_{yA} &= r_{2z} \cdot r_{3x} - r_{2x} \cdot r_{3z}; \\ V_{zA} &= r_{2x} \cdot r_{3y} - r_{2y} \cdot r_{3x}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Подставляя найденные значения скоростей (5.44) в уравнение (5.43) угол давления будет равен:

$$\alpha = \arccos \frac{-V_{xA} \cdot \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{11} - V_{yA} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{11} + V_{zA} \cdot \cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11}}{\sqrt{V_{xA}^2 + V_{yA}^2 + V_{zA}^2} \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi_{12} \cdot \cos^2 \varphi_{11} + \sin^2 \varphi_{12} \cdot \cos^2 \varphi_{11} + \cos^2 \varphi_{12} \cdot \sin^2 \varphi_{11}}} \quad (5.45)$$

Или после упрощения

$$\alpha = \arccos \frac{-V_{xA} \cdot \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{11} - V_{yA} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{11} + V_{zA} \cdot \cos \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{11}}{V_A \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi_{11} + \cos^2 \varphi_{12} \cdot \sin^2 \varphi_{11}}} \quad (5.46)$$

Рассчитаем угол давления для положения выходного звена с координатами точки $O_I (0,999; 0,02; 0)$ и длинами звеньев $l_1=1$ м; $l_2=1$ м; $l_3=1$ м.

Согласно уравнению (3.27) координаты силовых винтов \mathbf{R}_2 и \mathbf{R}_3 будут равны:

$$\begin{aligned} r_{2x} &= -\cos \varphi_{22} \cdot \sin \varphi_{21} = \cos 0^0 \cdot \sin 88^0 = -1; \\ r_{3y} &= \sin \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} = \sin 0^0 \cdot \cos 88^0 = 0; \\ r_{3z} &= \cos \varphi_{31} \cdot \cos \varphi_{32} = \cos 0^0 \cdot \cos 88^0 = 0,023. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Координаты вектора скорости в точке A :

$$\begin{aligned} V_{Ax} &= r_{2y} \cdot r_{3z} - r_{2z} \cdot r_{3y} = 3,46 \cdot 10^{-4}; \\ V_{Ay} &= r_{2z} \cdot r_{3x} - r_{2x} \cdot r_{3z} = 0,017; \\ V_{Az} &= r_{2x} \cdot r_{3y} - r_{2y} \cdot r_{3x} = -0,017. \end{aligned} \quad (5.48)$$

После подстановки выражений (5.48), (5.47) в уравнение (5.46) получаем угол давления равным $\alpha=87^05'$.

Этому положению соответствуют уравнения скоростей (5.22):

$$V_x = q_1 \cdot (-1);$$

$$V_y = q_1 \cdot (-22) + q_2 \cdot (-1);$$

$$V_z = q_1 \cdot (-22) + q_3 \cdot (-1).$$

В точке O_I'' (0,9999; 0,02; 0) угол давления равен $\alpha=89^0$. Этому положению будут соответствовать уравнения скоростей:

$$V_x = q_1 \cdot (-1);$$

$$V_y = q_1 \cdot (-70) + q_2 \cdot (-1);$$

$$V_z = q_1 \cdot (-70) + q_3 \cdot (-1).$$

Значения собственных частот колебаний приведены в табл. 5.1.

Таким образом, найдено положение, в котором две матрицы выродились (матрица плюккеровых координат двух кинематических цепей и матрица, составленная из координат силовых винтов). Силовые винты имеют следующие координаты: \mathbf{R}_1 (1; 0; 0), \mathbf{R}_2 (-1; 0; 0), \mathbf{R}_3 (1; 0; 0).

Таблица 5.1

Собственные частоты колебаний манипулятора в точках O_I' и O_I''

Собственные частоты колебаний ν , Гц	Угол давления α , град.	
	$87,5^0$	89^0
ν_1	0,18	0,05
ν_2	15,5	24,3
ν_3	36,2	38,3

Теперь рассмотрим другое положение выходного звена механизма с координатами точки O_2' (0,999; 0,999; 0), особым является положение с координатами в точке O_2 (1; 1; 0) (рис.5.5).

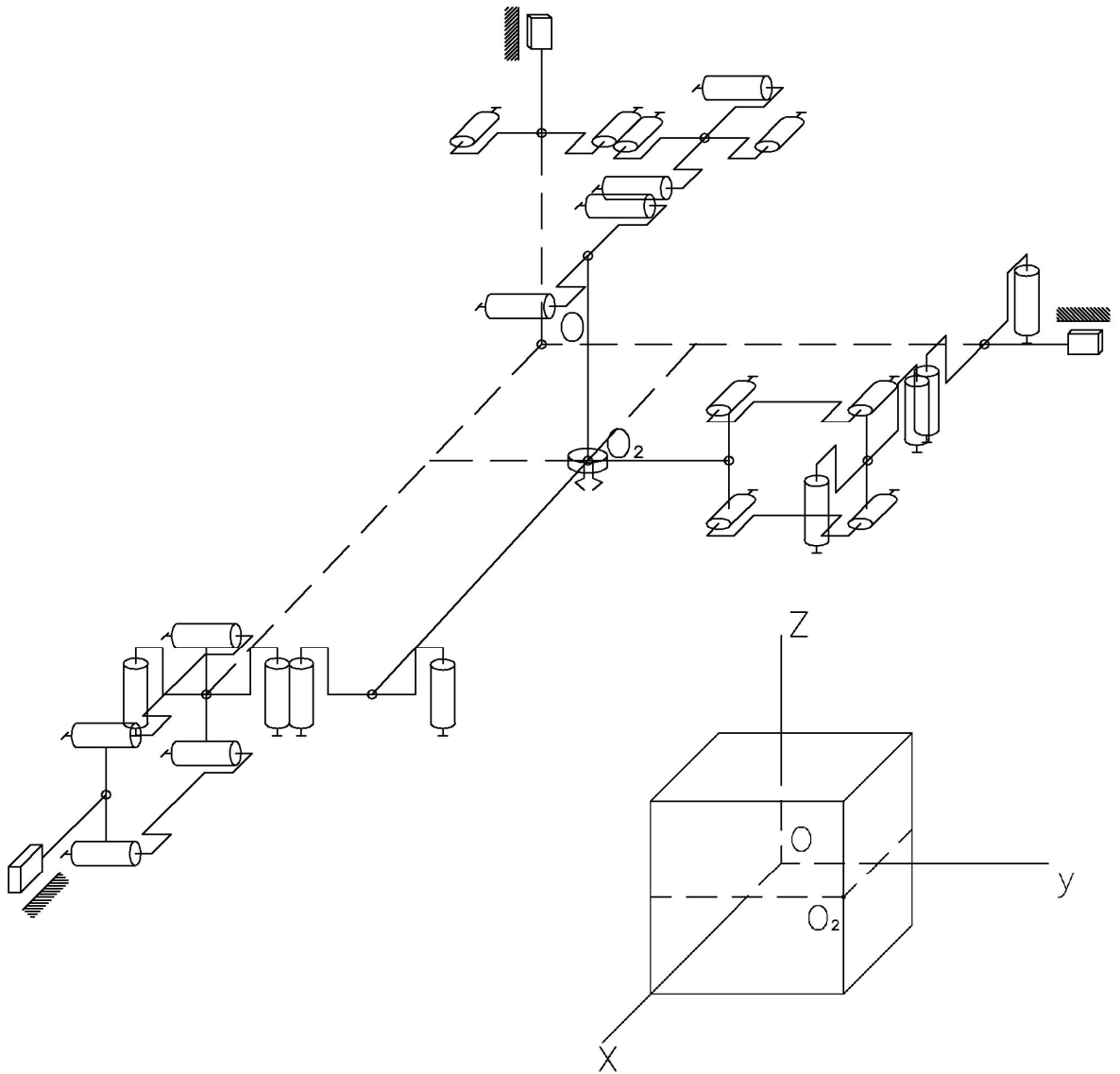


Рис. 5.5. Положение звеньев манипулятора при положении выходного звена с координатами точки O_2 (1; 1; 0) и положение точки O_2 в рабочей зоне

Этому положению соответствуют угол давления $\alpha=87,5^0$ и уравнения скоростей: $V_x = q_2 \cdot 0,046$; $V_y = q_1 \cdot 0,046$; $V_z = q_1 \cdot 1,048 + q_2 \cdot 1,048 + q_1 \cdot (-1)$.

Положению в точке O_2'' (0,9999; 0,9999; 0) соответствует угол давления $\alpha=89^0$. Этому положению будет соответствовать уравнения скоростей:

$$V_x = q_2 \cdot 0,014; V_y = q_1 \cdot 0,014; V_z = q_1 \cdot 1,014 + q_2 \cdot 1,014 + q_3 \cdot (-1)$$

Значения собственных частот колебаний для рассматриваемого случая приведены в табл. 5.2.

Собственные частоты колебаний манипулятора в точках O_2' и O_2''

Собственные частоты колебаний ν , Гц	Угол давления α , град	
	$87,5^0$	89^0
ν_1	0,8	0,7
ν_2	24,7	28,1
ν_3	26,8	33,4

Силловые винты имеют следующие координаты: \mathbf{R}_1 (0; 1; 0), \mathbf{R}_2 (-1; 0; 0), \mathbf{R}_3 (0; 0; 0).

Теперь рассмотрим положение выходного звена механизма (рис.5.6) с координатами точки O_3' (0,999; 0,999; 0,999), которому соответствует угол давления $\alpha=87,5^0$. Особым является положение выходного звена с координатами (1; 1; 1). В этом случае имеем уравнения скоростей в виде

$$V_x = q_1 \cdot (-0,02) + q_2 \cdot 0,02 + q_3 \cdot 0,02;$$

$$V_y = q_1 \cdot 0,02 + q_2 \cdot (-0,02) + q_3 \cdot 0,02$$

$$V_z = q_1 \cdot 0,02 + q_2 \cdot 0,02 + q_3 \cdot (-0,02).$$

Положению в точке O_3'' (0,9999; 0,9999; 0) соответствует угол давления $\alpha=89^0$. Этому положению будет соответствовать уравнения скоростей:

$$V_x = q_1 \cdot (-0,0069) + q_2 \cdot 0,007 + q_3 \cdot 0,007;$$

$$V_y = q_1 \cdot 0,007 + q_2 \cdot (-0,069) + q_3 \cdot 0,007;$$

$$V_z = q_1 \cdot 0,007 + q_2 \cdot 0,007 + q_3 \cdot (-0,0068).$$

Значения собственных частот колебаний для рассматриваемого случая приведены в табл. 5.3. Силловые винты имеют следующие координаты: \mathbf{R}_1 (0; 0; 0), \mathbf{R}_2 (0; 0; 0), \mathbf{R}_3 (0; 0; 0).

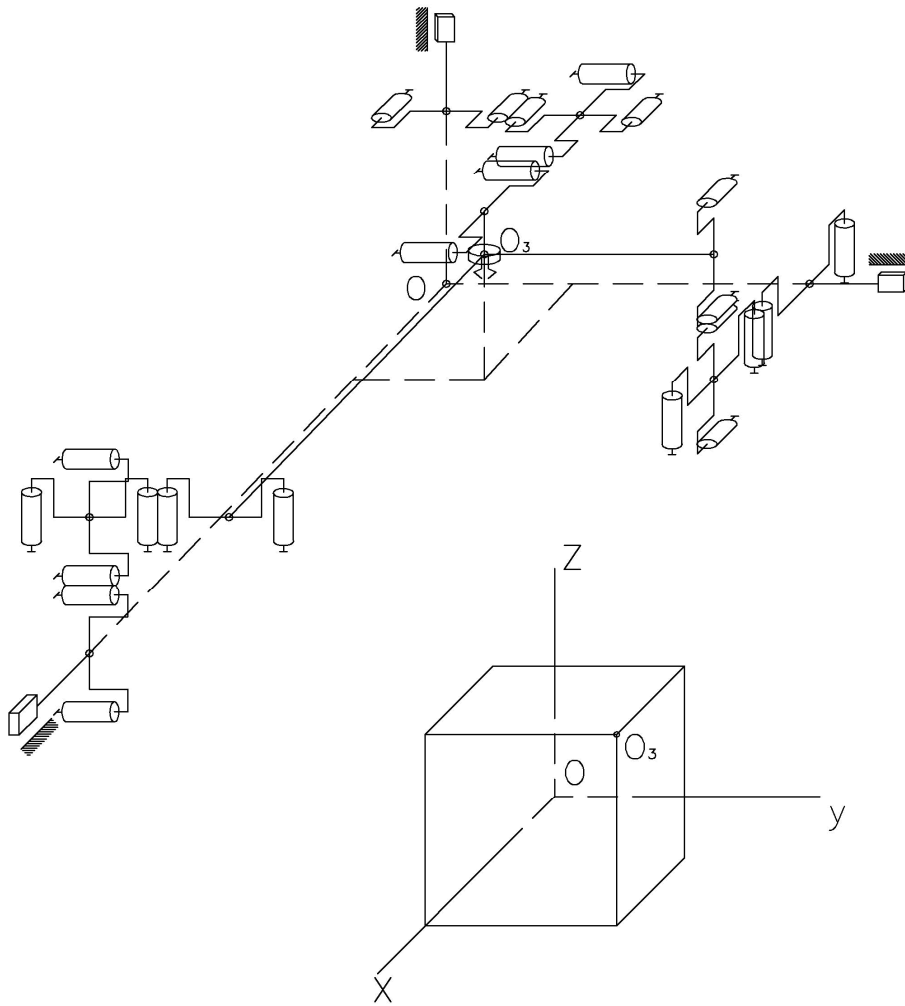


Рис. 5.6. Положение звеньев манипулятора при положении выходного звена с координатами точки O_3 (1; 1; 1) и положение точки O_3 в рабочей зоне

Собственные частоты колебаний манипулятора в точках O_3' и O_3'' Таблица 5.3

Собственные частоты колебаний ν , Гц	Угол давления α , град	
	$87,5^0$	89^0
ν_1	0,5	0,07
ν_2	15,1	16,5
ν_3	26,2	32,5

Таким образом, при приближении к особому положению, связанному с потерей управляемости одна собственная частота колебаний стремится к нулю, что связано с уменьшением жесткости.

Рассмотрим сферический механизм (рис.4.11) в положении, близком к особому, при $\alpha=0^0$, $\beta=0^0$, $\gamma=90,2^0$. Такому положению соответствуют углы поворота входных звеньев: $\varphi_{11}=90,2^0$; $\varphi_{12}=0^0$; $\varphi_{21}=0$; $\varphi_{22}=89,8^0$; $\varphi_{31}=90,2^0$ $\varphi_{32}=0^0$. Механизм в целом находится в особом положении и при этом теряется одна степень свободы. Матрицы **A** и **B** имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,0003 & 1 & 0 \\ 0 & -26 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 82070 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 823070 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц \mathbf{A}^{-1} и **B** равно:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -6,6 \cdot 10^{-7} & 7,6 \cdot 10^{-5} & -5,8 \cdot 10^{-9} \\ 0 & -7,6 \cdot 10^{-5} & 0 \\ -6,6 \cdot 10^{-7} & 7,6 \cdot 10^{-5} & 7,6 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}.$$

Подставим в уравнения (5.35) коэффициенты, стоящие при обобщенных скоростях:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi}_{11} \cdot (2,35 \cdot 10^7) + \dot{\varphi}_{21} \cdot (-1), \\ \omega_y &= \dot{\varphi}_{21} \cdot (-3,5 \cdot 10^{-3}), \\ \omega_z &= -1 \cdot \dot{\varphi}_{31}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Решая систему уравнений (5.33), подставив уравнения (5.49) имеем следующие значения круговых частот: $\omega_1=32,3 \cdot 10^3$ рад/с, $\omega_2=13,8$ рад/с, $\omega_3=38$ рад/с, и соответствующих им собственных частот колебаний $\nu_1=5,1 \cdot 10^3$ Гц, $\nu_2=2,2$ Гц, $\nu_3=6,1$ Гц.

При приближении к особому положению второго типа одна собственная частота стремится к нулю, что связано с уменьшением жесткости механизма.

5.3. Нелинейные колебания манипуляционных механизмов

Проведем анализ нелинейных колебаний механизмов. Нелинейность механической системы обусловлена ее геометрией и взаимосвязанностью приводов [113].

Рассмотрим положение равновесия, в котором обобщенные силы (усилия в приводах) равны нулю. При перемещении из положения равновесия появляются упругие силы, которые пропорциональны перемещению (углу поворота) в приводах.

Рассмотрим поступательно-направляющий механизм. При перемещении выходного звена на элементарное расстояние соответственно δx , δy , δz имеем следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}\delta x + P_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} \delta x + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} \delta x + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial x} \delta x + m_1 \ddot{q}_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} \delta x + m_2 \ddot{q}_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} \delta x + m_3 \ddot{q}_3 \frac{\partial q_3}{\partial x} \delta x &= 0 \\
 m\ddot{y}\delta y + P_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} \delta y + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} \delta y + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial y} \delta y + m_1 \ddot{q}_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} \delta y + m_2 \ddot{q}_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} \delta y + m_3 \ddot{q}_3 \frac{\partial q_3}{\partial y} \delta y &= 0 \quad (5.50) \\
 m\ddot{z}\delta z + P_1 \frac{\partial q_1}{\partial z} \delta z + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial z} \delta z + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial z} \delta z + m_1 \ddot{q}_1 \frac{\partial q_1}{\partial z} \delta z + m_2 \ddot{q}_2 \frac{\partial q_2}{\partial z} \delta z + m_3 \ddot{q}_3 \frac{\partial q_3}{\partial z} \delta z + mg\delta z &= 0
 \end{aligned}$$

Механизм находится в положении равновесия с координатами выходного звена $x=0$; $y=0$; $z=0$. Коэффициенты, составленные из частных производных, определяются дифференцированием уравнений связей и в рассматриваемой задаче не являются постоянными величинами.

Зададим массу выходного звена $m=0,5$ кг, массы входных звеньев $m_i=0,1$ кг, жесткость приводов $c=10000$ Н/мм. Используя программы для численного интегрирования, а также решение задачи об ускорении, найдем изменения координат выходного звена при следующих начальных условиях: $x=0,15$; $y=0,12$; $z=0,01$.

На рис.5.7 представлены законы изменения x , y , z для нелинейных колебаний выходного звена. Нелинейность механической системы обусловлена нелинейностями упругих характеристик привода

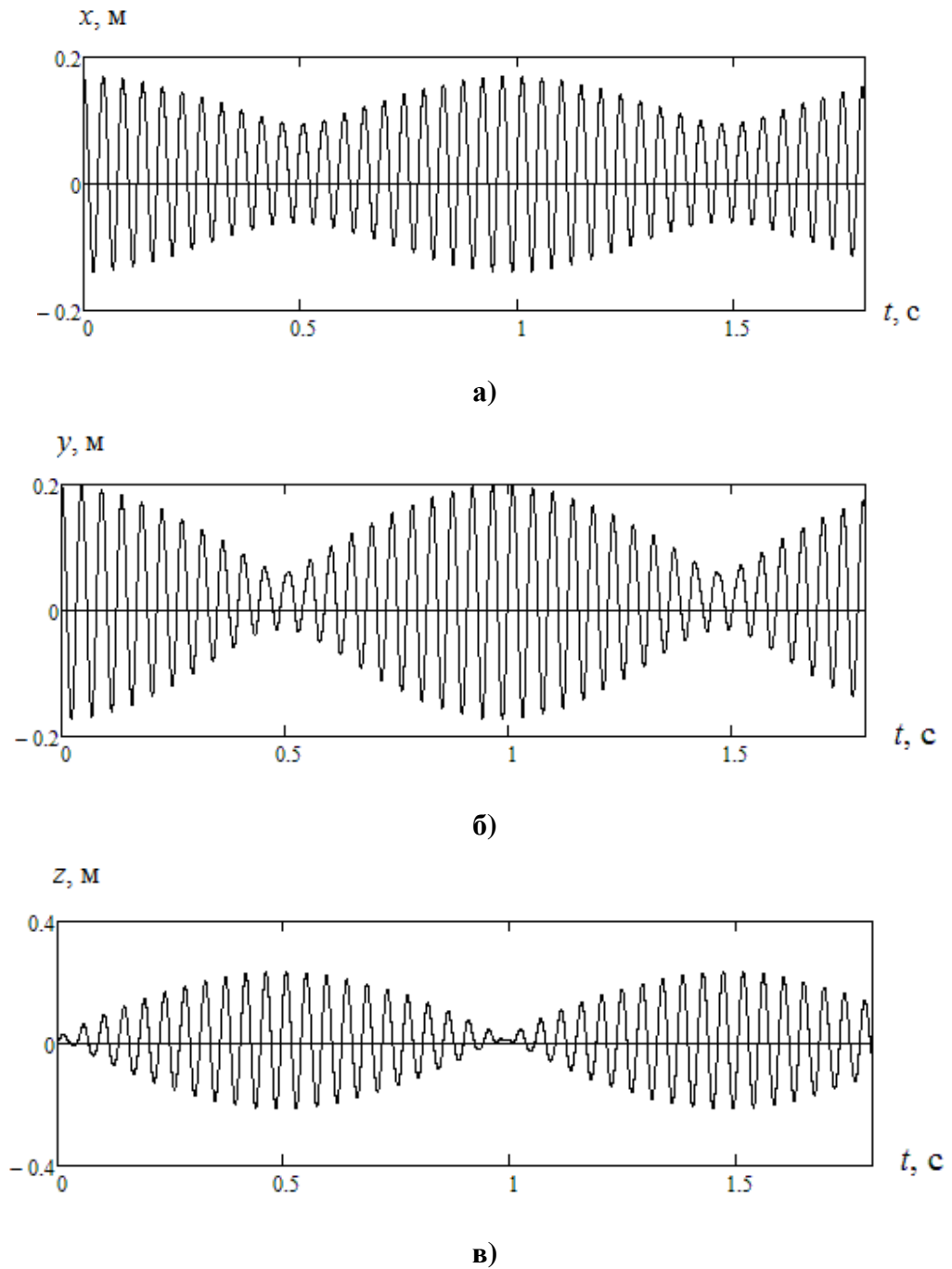


Рис. 5.7 . Графики изменения координат выходного звена

а – x , б – y , в – z

Теперь рассмотрим другие начальные условия – координаты выходного звена $x=0,25$; $y=0$; $z=0,15$. В этом случае график изменения координат представлен на рис. 5.8.

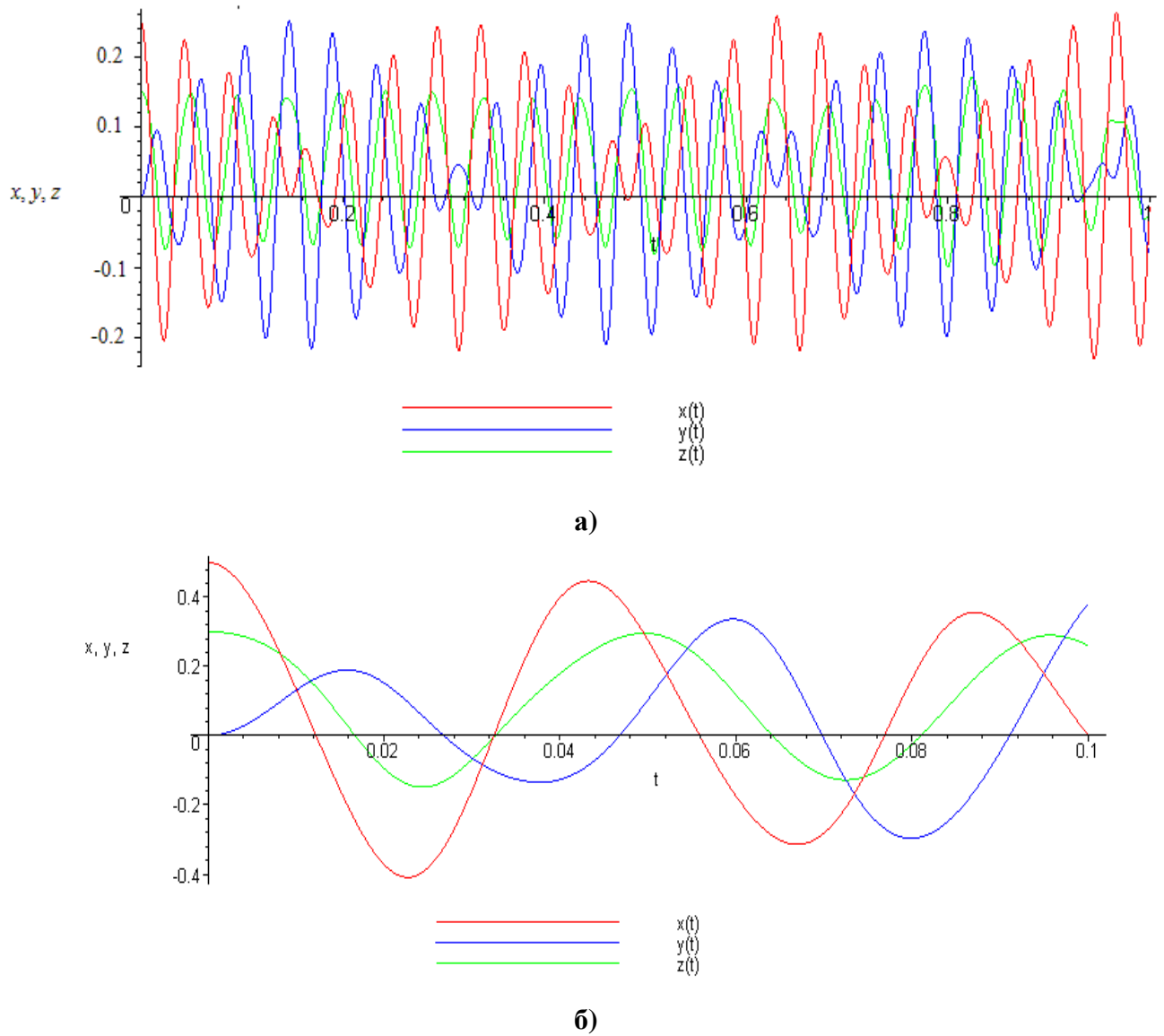


Рис.5.8 Графики изменения координат выходного звена x, y, z
а – Масштаб $t=0..1$, **б** – Масштаб $t=0..0.1$

Проведем анализ нелинейных колебаний сферического механизма с тремя степенями свободы [119, 193]. Уравнение движения сферического механизма с тремя степенями свободы имеет вид:

$$\begin{cases} J_{\xi} \cdot \ddot{\varphi}_{\xi} = M_1 \cdot \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{\xi}} + M_2 \cdot \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \varphi_{\xi}} + M_3 \cdot \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_{\xi}} + \dot{\varphi}_{\eta} \cdot \dot{\varphi}_{\zeta} \cdot (J_{\zeta} - J_{\eta}) \\ J_{\eta} \cdot \ddot{\varphi}_{\eta} = M_1 \cdot \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{\eta}} + M_2 \cdot \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \varphi_{\eta}} + M_3 \cdot \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_{\eta}} + \dot{\varphi}_{\xi} \cdot \dot{\varphi}_{\zeta} \cdot (J_{\xi} - J_{\zeta}) \\ J_{\zeta} \cdot \ddot{\varphi}_{\zeta} = M_1 \cdot \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{\zeta}} + M_2 \cdot \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \varphi_{\zeta}} + M_3 \cdot \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_{\zeta}} + \dot{\varphi}_{\xi} \cdot \dot{\varphi}_{\eta} \cdot (J_{\eta} - J_{\xi}) \end{cases} \quad (5.51)$$

где $J_\xi = J_\eta$, J_ζ – моменты инерции относительно осей ξ , η , ζ

M_1, M_2, M_3 – моменты в приводах, Н·мм;

$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \varphi_\xi}$ – переменные коэффициенты.

$\ddot{\varphi}_\xi, \dot{\varphi}_\xi, \ddot{\varphi}_\eta, \dot{\varphi}_\eta, \ddot{\varphi}_\zeta, \dot{\varphi}_\zeta$ – проекции ускорений и скоростей на оси ξ , η , ζ .

Переменные коэффициенты можно определить из уравнений прямой задачи о скоростях методом винтового исчисления. При этом требуется найти силовой винт \mathbf{R}_i с координатами $(r_{ix}, r_{iy}, r_{iz}, r_{ix}^0, r_{iy}^0, r_{iz}^0)$, взаимный двум ортам осей e'_{i2}, e_{i5} неприводных пар. Как отмечалось, в данном случае кинематическая пара e'_{i2} , входящая в эквивалентный механизм (рис.3), заменяет три пары e_{i2}, e_{i3}, e_{i4} исходного механизма.

Кинематический винт выходного звена равен сумме кинематических винтов в парах цепи $\mathbf{\Omega}_i = \mathbf{\Omega}_{i1} + \mathbf{\Omega}_{i2} + \mathbf{\Omega}_{i3}$,

где $\mathbf{\Omega}_i$ – кинематический винт выходного звена с координатами $(V_x, V_y, V_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Отметим, что в данном случае $V_x = V_y = V_z = 0$,

$\mathbf{\Omega}_{i1}, \mathbf{\Omega}_{i2}, \mathbf{\Omega}_{i3}$ – кинематические винты первой, второй, третьей кинематических пар с координатами соответственно $(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}, x_{i1}^0, y_{i1}^0, z_{i1}^0) \cdot \omega_{i1}$, $(x_{i2}, y_{i2}, z_{i2}, x_{i2}^0, y_{i2}^0, z_{i2}^0) \cdot \omega_{i2}$, $(x_{i3}, y_{i3}, z_{i3}, x_{i3}^0, y_{i3}^0, z_{i3}^0) \cdot \omega_{i3}$.

Можно записать, что относительный момент двух винтов равен

$$\text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_i) = \text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_{i1} + \mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_{i2} + \mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_{i3}).$$

Так как силовой винт взаимен ортам неприводных пар, то относительные моменты $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_{i2}) = 0$, $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_{i3}) = 0$, таким образом $\text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_i) = \text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_{i1})$. Подставив значения координат силовых и кинематических винтов, получим уравнения относительных моментов:

$$\text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_i) = \omega_\xi \cdot r_{i\xi}^0 + \omega_\eta \cdot r_{i\eta}^0 + \omega_\zeta \cdot r_{i\zeta}^0;$$

$$\text{mom}(\mathbf{R}_i, \mathbf{\Omega}_{i1}) = \omega_{i1} \cdot (x_{i1} r_{ix}^0 + y_{i1} r_{iy}^0 + z_{i1} r_{iz}^0),$$

где (x_{i1}, y_{i1}, z_{i1}) – плюккеровы координаты единичных векторов e_{i1} , расположенных вдоль осей приводных пар;

\mathbf{r}_i^0 – моментная часть силового винта с координатами $r_{1x}^0, r_{1y}^0, r_{1z}^0$.

Система уравнений для трех кинематических цепей имеет вид:

$$\begin{aligned}\omega_\xi \cdot r_{1\xi}^0 + \omega_\eta \cdot r_{1\eta}^0 + \omega_\zeta \cdot r_{1\zeta}^0 &= \omega_{11} \cdot (x_{11}r_{1x}^0 + y_{11}r_{1y}^0 + z_{11}r_{1z}^0); \\ \omega_\xi \cdot r_{2\xi}^0 + \omega_\eta \cdot r_{2\eta}^0 + \omega_\zeta \cdot r_{2\zeta}^0 &= \omega_{21} \cdot (x_{21}r_{2x}^0 + y_{21}r_{2y}^0 + z_{21}r_{2z}^0); \\ \omega_\xi \cdot r_{3\xi}^0 + \omega_\eta \cdot r_{3\eta}^0 + \omega_\zeta \cdot r_{3\zeta}^0 &= \omega_{31} \cdot (x_{31}r_{3x}^0 + y_{31}r_{3y}^0 + z_{31}r_{3z}^0)\end{aligned}\quad (5.52)$$

где $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ – угловые скорости выходного звена вокруг осей ξ, η, ζ

$r_{i\xi}^0, r_{i\eta}^0, r_{i\zeta}^0$ – координаты моментной части i -го силового винта.

Тогда переменные коэффициенты, стоящие перед значениями моментов M , можно определить следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_\xi} = \frac{\omega_{11}}{\omega_\xi} = \frac{r_{1\xi}^0}{r_{1x}^0}; \quad \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_\eta} = \frac{\omega_{11}}{\omega_\eta} = \frac{r_{1\eta}^0}{r_{1x}^0}; \quad \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_\eta} = \frac{\omega_{31}}{\omega_\eta} = \frac{r_{3\eta}^0}{r_{3z}^0} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_\zeta} = \frac{\omega_{31}}{\omega_\zeta} = \frac{r_{3\zeta}^0}{r_{3z}^0}.$$

Остальные коэффициенты имеют сходный вид.

Координаты ортов второй (x_{12}, y_{12}, z_{12}) и третьей (x_{13}, y_{13}, z_{13}) пар первой цепи в неподвижной системе координат рассчитываются следующим образом:

– для второй пары координаты ортов определяются произведением матрицы поворота вокруг оси x на координаты второй пары в ее начальном положении

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{11} & -\sin \varphi_{11} \\ 0 & \sin \varphi_{11} & \cos \varphi_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi_{11} \\ \sin \varphi_{11} \end{pmatrix};$$

– координаты ортов третьей пары первой цепи определяются произведением матрицы A , описывающей переход от подвижной координатной системы к неподвижной, на координаты указанного орта в ее начальном положении:

$$\begin{pmatrix} x_{13} \\ y_{13} \\ z_{13} \end{pmatrix} = (A) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta \\ \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \sin \gamma \\ \cos \beta \cdot \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет вид $A = A_3 \cdot A_2 \cdot A_1$;

где A_1 – матрица поворота вокруг оси x ,

A_2 – матрица поворота вокруг оси y ,

A_3 – матрица поворота вокруг оси z .

Для второй цепи координаты ортов второй и третьей пар равны:

$$\begin{pmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} & 0 & \sin \varphi_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{21} & 0 & \cos \varphi_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{21} \\ 0 \\ \sin \varphi_{21} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_{13} \\ y_{13} \\ z_{13} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ \cos \beta \cdot \sin \alpha \\ -\sin \beta \end{pmatrix}.$$

Для третьей цепи координаты ортов второй и третьей пар равны:

$$\begin{pmatrix} x_{32} \\ y_{32} \\ z_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} & -\sin \varphi_{31} & 0 \\ \sin \varphi_{31} & \cos \varphi_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} \\ \sin \varphi_{31} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{33} \\ y_{33} \\ z_{33} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos \gamma \cdot \sin \alpha \\ \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \\ -\cos \beta \cdot \sin \gamma \end{pmatrix}.$$

Координаты ортов вторых пар первой, второй и третьей цепей в подвижной системе координат определяются матрицей \mathbf{A}^{-1} , обратной матрице \mathbf{A} .

$$\begin{pmatrix} e_{\xi 12} \\ e_{\eta 12} \\ e_{\zeta 12} \end{pmatrix} = (\mathbf{A})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_{11} - \sin \beta \cdot \sin \varphi_{11} \\ \cos \varphi_{11} \cdot (\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) + \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_{11} \\ \cos \beta \cdot \cos \alpha \cdot \sin \varphi_{11} - \cos \varphi_{11} \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_{\xi 22} \\ e_{\eta 22} \\ e_{\zeta 22} \end{pmatrix} = (\mathbf{A})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_{22} \\ z_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_{\xi 32} \\ e_{\eta 32} \\ e_{\zeta 32} \end{pmatrix} = (\mathbf{A})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_{32} \\ y_{32} \\ z_{32} \end{pmatrix}$$

Координаты ортов третьих пар первой, второй и третьей цепей равны:

$$\begin{pmatrix} e_{\xi 13} \\ e_{\eta 13} \\ e_{\zeta 13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_{\xi 23} \\ e_{\eta 23} \\ e_{\zeta 23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_{\xi 33} \\ e_{\eta 33} \\ e_{\zeta 33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Моментная часть силового винта для первой кинематической цепи в подвижной системе координат равна:

$$\mathbf{r}_1^0 = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ e_{\xi 12} & e_{\eta 12} & e_{\zeta 12} \\ e_{\xi 13} & e_{\eta 13} & e_{\zeta 13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ e_{\xi 12} & e_{\eta 12} & e_{\zeta 12} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \xi \cdot (e_{\eta 12} \cdot 1 - e_{\zeta 12} \cdot 0) + \eta \cdot (e_{\zeta 12} \cdot 0 - e_{\xi 12} \cdot 1) + \rho \cdot (e_{\xi 12} \cdot 0 - e_{\eta 12} \cdot 0),$$

$$r_{1\eta}^0 = -\sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_{11} + \sin \beta \cdot \sin \varphi_{11}$$

$$r_{1\xi}^0 = \cos \varphi_{11} \cdot (\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha) + \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_{11}$$

$$r_{1\zeta}^0 = 0$$

Аналогичным образом рассчитываются моментные части силовых винтов для второй и третьей цепей:

$$r_{2\xi}^0 = 0$$

$$r_{2\eta}^0 = -\sin \varphi_{21} \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) + \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{21}$$

$$r_{2\zeta}^0 = \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi_{21} - \sin \varphi_{21} \cdot (\sin \gamma \cdot \cos \alpha - \cos \gamma \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha)$$

$$r_{3\xi}^0 = -\cos \varphi_{31} \cdot (\sin \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) - \sin \varphi_{31} \cdot (\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta)$$

$$r_{3\eta}^0 = 0$$

$$r_{3\zeta}^0 = \cos \gamma \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_{31} + \sin \gamma \cdot \cos \beta \cdot \sin \varphi_{31}$$

Для определения углов α , β , γ необходимо соотношение между угловыми скоростями в подвижной системе координат ω_ξ , ω_η , ω_ζ и скоростями изменения углов $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$. Эти соотношения можно записать в следующем виде:

$$\omega_\xi = \dot{\alpha} \cdot \alpha_\xi + \dot{\beta} \cdot \beta_\xi + \dot{\gamma} \cdot \gamma_\xi;$$

$$\omega_\eta = \dot{\alpha} \cdot \alpha_\eta + \dot{\beta} \cdot \beta_\eta + \dot{\gamma} \cdot \gamma_\eta; \quad (5.53)$$

$$\omega_\zeta = \dot{\alpha} \cdot \alpha_\zeta + \dot{\beta} \cdot \beta_\zeta + \dot{\gamma} \cdot \gamma_\zeta$$

где $\begin{pmatrix} \alpha_\xi \\ \alpha_\eta \\ \alpha_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – проекции орта третьей пары фиктивной кинематической цепи,

соответствующей скорости изменения угла α на оси ξ , η , ζ ;

$\begin{pmatrix} \beta_\xi \\ \beta_\eta \\ \beta_\zeta \end{pmatrix}$ – проекции орта второй пары фиктивной кинематической цепи, соответ-

ствующей скорости изменения угла β , на оси ξ , η , ζ :

$$\begin{pmatrix} \beta_\xi \\ \beta_\eta \\ \beta_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \\ \gamma_\zeta \end{pmatrix}$ – проекции орта первой пары фиктивной цепи, соответствующей скорости

изменения γ на оси ξ , η , ζ :

$$\begin{pmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \\ \gamma_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ \cos\beta \cdot \sin\alpha \\ \cos\beta \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Выразим $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ через ω_ξ , ω_η , ω_ζ :

$$\dot{\alpha} = \frac{\omega_\xi \cdot \cos\beta + \omega_\eta \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta + \omega_\zeta \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\beta}$$

$$\dot{\beta} = \omega_\eta \cdot \cos\alpha - \omega_\zeta \cdot \sin\alpha \quad (5.54)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega_\eta \cdot \sin\alpha + \omega_\zeta \cdot \cos\alpha}{\cos\beta}$$

Моментная часть силового винта в неподвижной системе координат равна [118]:

$$\begin{pmatrix} r_{1x}^0 \\ r_{1y}^0 \\ r_{1z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{12} \\ -\sin\varphi_{11} \cdot \sin\varphi_{12} \\ \cos\varphi_{11} \cdot \sin\varphi_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{2x}^0 \\ r_{2y}^0 \\ r_{2z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi_{21} \cdot \sin\varphi_{22} \\ \cos\varphi_{22} \\ \sin\varphi_{21} \cdot \sin\varphi_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{3x}^0 \\ r_{3y}^0 \\ r_{3z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi_{31} \cdot \sin\varphi_{32} \\ \cos\varphi_{31} \cdot \sin\varphi_{32} \\ \cos\varphi_{32} \end{pmatrix}$$

Зависимость углов поворота промежуточных φ_{i2} определяются из решения задачи о положении [114]:

$$\sin\varphi_{12} = \sin\gamma \cdot \sin\alpha + \cos\alpha \cdot \cos\gamma \cdot \sin\beta;$$

$$\sin\varphi_{22} = \cos\beta \cdot \sin\gamma; \quad (5.55)$$

$$\sin\varphi_{32} = \cos\beta \cdot \sin\alpha$$

Моменты в приводах равны:

$$\begin{cases} M_1 = -c_1 \cdot \varphi_{11} \\ M_2 = -c_2 \cdot \varphi_{21} \\ M_3 = -c_3 \cdot \varphi_{31} \end{cases} \quad (5.56)$$

где c_i – жесткость привода, Н·м/рад;

Сферический механизм находится в равновесии при следующих углах:

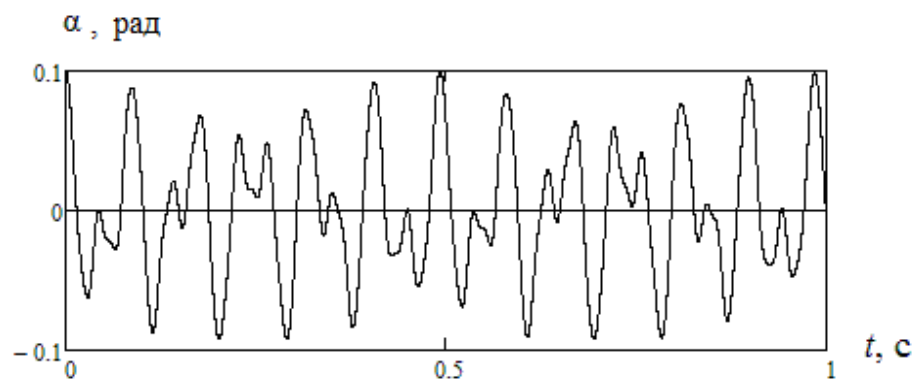
$$\varphi_{11} = 0; \varphi_{21} = 0; \varphi_{31} = 0; \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Используя численное интегрирование, найдем изменения координат выходного звена при следующих начальных условиях:

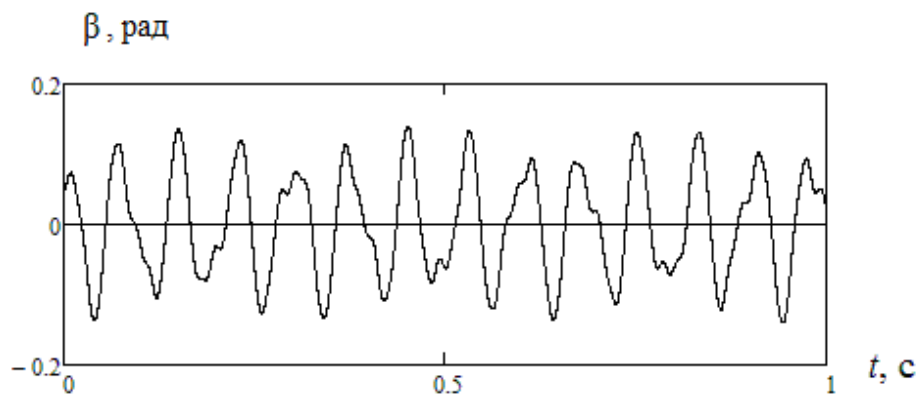
$$\alpha = 0,1 \text{ рад}; \beta = 0,05 \text{ рад}; \gamma = 0,325 \text{ рад}.$$

Примем массу выходного звена $m = 0,5$ кг, радиус платформы выходного звена $r = 0,1$ м.

Законы изменения α , β , γ для нелинейных колебаний выходного звена показан на (рис 5.9.а, б, в).



а)



б)

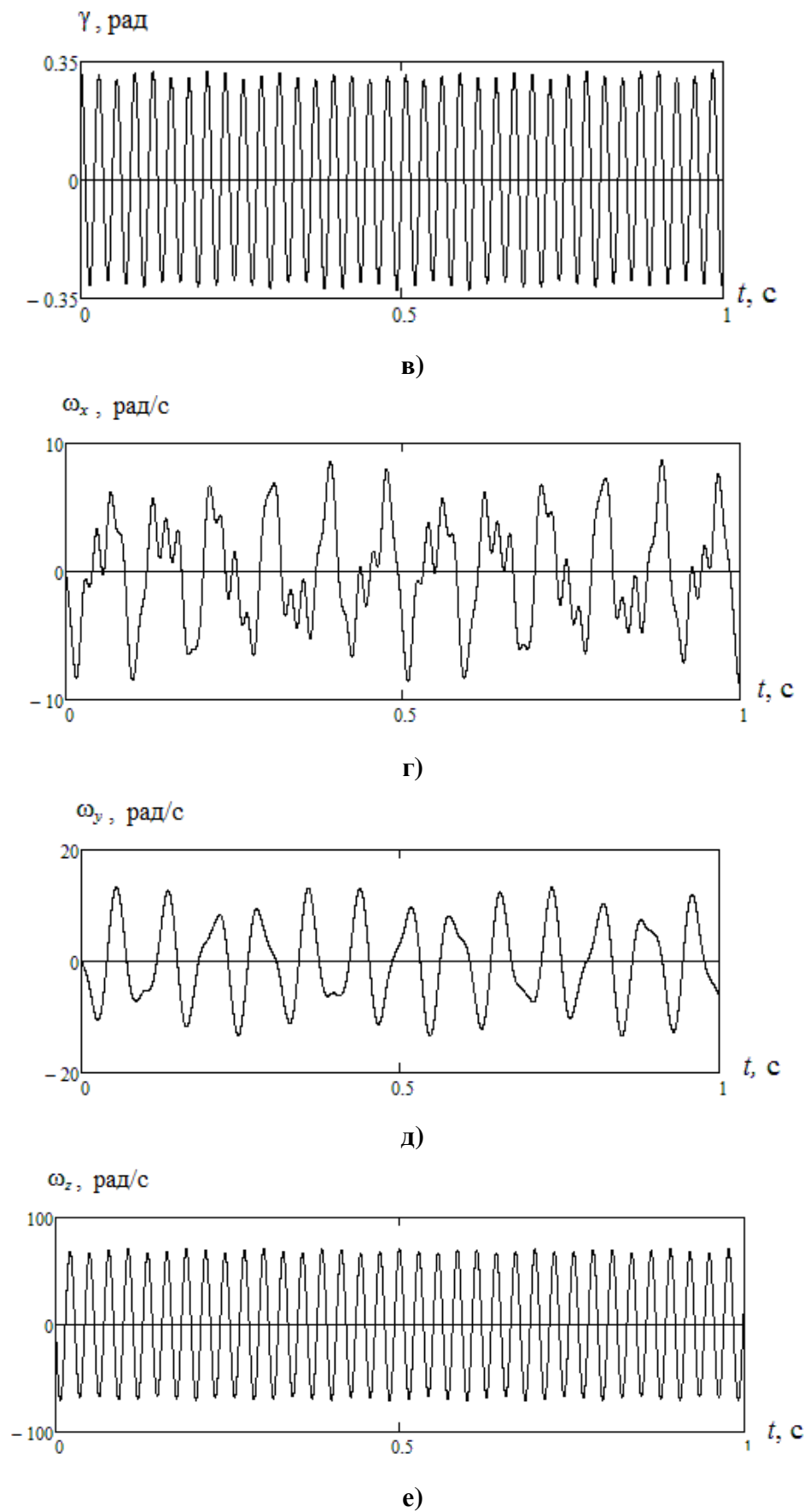


Рис. 5.9 . Графики изменения

а, б, в – координат выходного звена α , β , γ ;

г, д, е – скоростей выходного звена $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

Вывод по главе 5

1. Разработана методика определения близости к сингулярности на основе анализа собственных частот колебаний манипуляционных механизмов параллельной структуры с тремя степенями свободы для плоских, поступательно-направляющих, вращательных движений.
2. Использование методики определения собственных частот позволяет предложить динамический критерий особых положений через частотные характеристики. При приближении к особым положениям, когда угол давления приближается к 90^0 , первая собственная частота уменьшается в десятки раз, а по крайней мере одна из двух других увеличивается. Это связано с тем, что жесткость по одной степени свободы уменьшается, а по другой увеличивается.
3. Влияние между степенями свободы и приводов приводит к появлению нелинейных явлений в динамике механизмов. Получены законы изменения координат выходного звена для нелинейных колебаний. Это может быть учтено при управлении устройством.
4. Возбуждение колебаний по одно, из координат приводит к появлению колебаний по другим координатам, что связано с взаимным влиянием степеней свободы. Собственные колебания нелинейной системы описываются процессами типа биения, это связано с тем, что энергия переходит от одной координаты к другой.

ГЛАВА 6. УПРАВЛЕНИЕ МЕХАНИЗМАМИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

В данной главе рассмотрены алгоритмы управления механизмами параллельной структуры. Предложенные алгоритмы реализованы на плоском, поступательно-направляющем и сферических механизмах. Кроме того, для плоского механизма рассмотрена задача управления при переходе через особые положения.

6.1. Управление движением манипуляционных роботов по назначенным траекториям на основе обратных задач динамики

Важной функциональной частью промышленного манипулятора является система его управления. Основными задачами системы управления являются:

- осуществление движения исполнительного органа по заданной траектории, определяемой уравнениями;
- обеспечение заданных законов изменения координат во времени.

Исполнительная система должна удовлетворять техническим требованиям, быть устойчивой, переходные процессы соответствовать заданным показателям качества. В настоящее время задачи управления приводными системами получили значительное развитие – разработаны приемы, методы и алгоритмы их проектирования [20, 21, 55, 58, 68, 69, 70, 80, 94, 95, 106]. Приводы являются следящими системами и имеют обратные связи по координате выхода, скорости, ускорения или силе. Задачи управления решаются с использованием методов теории автоматического регулирования. При этом рассматривались только механизмы роботов последовательной структуры [48, 107, 127, 134, 160]. Наряду с этим, трудности вызывают задачи управления механизмами параллельной структуры с изменяющимися моментами инерции, нелинейностью уравнений связей, взаимовлиянием между степенями свободы, непостоянным передаточным отношением между

входными (обобщенными) и выходными (абсолютными) координатами выходного звена (рабочего органа).

Известно решение задачи управления механизмом параллельной структуры с 2-мя степенями свободы [26, 169] при переходе через особое положение, связанное с потерей управляемости. Оно основано на решении обратной задачи динамики и связано с вычислением сил по заданному движению [70, 160]. Метод обратных задач динамики позволяет строить алгоритмы управления на основе математических моделей управляемых процессов [10, 48, 96].

Предлагаемый алгоритм управления основан на минимизации отклонения от заданного закона движения. Рассмотрим механизм с тремя степенями свободы и тремя приводами. Пусть задано требуемое движение выходного звена в виде закона изменения координат: $x_T(t)$, $y_T(t)$, $z_T(t)$. После дифференцирования получаем требуемые скорости $\dot{x}_T(t)$, $\dot{y}_T(t)$, $\dot{z}_T(t)$ и ускорения $\ddot{x}_T(t)$, $\ddot{y}_T(t)$, $\ddot{z}_T(t)$.

Задача управления формулируется следующим образом, что требуется найти силы (моменты) в приводах, при которых исполнительный механизм перемещается по заданному закону. При этом задача состоит в минимизации ошибки по координате:

$$\Delta_1(t) = x_T(t) - x(t), \Delta_2(t) = y_T(t) - y(t), \Delta_3(t) = z_T(t) - z(t),$$

по скорости :

$$\dot{\Delta}_1(t) = \dot{x}_T(t) - \dot{x}(t), \dot{\Delta}_2(t) = \dot{y}_T(t) - \dot{y}(t), \dot{\Delta}_3(t) = \dot{z}_T(t) - \dot{z}(t),$$

по ускорению:

$$\ddot{\Delta}_1(t) = \ddot{x}_T(t) - \ddot{x}(t), \ddot{\Delta}_2(t) = \ddot{y}_T(t) - \ddot{y}(t), \ddot{\Delta}_3(t) = \ddot{z}_T(t) - \ddot{z}(t),$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, $\ddot{z}(t)$ – фактические значения координат, скоростей, ускорений выходного звена.

Для оценки быстроты затухания и величины отклонения используем квадратичную интегральную оценку переходного процесса

$$G_i = \int_{t_0}^T (\Delta_i^2 + k_1 \cdot \dot{\Delta}_i^2 + k_2 \cdot \ddot{\Delta}_i^2) dt. \text{ Значение этого интеграла должно принимать мини-}$$

мальное значение,

где k_1, k_2 - постоянные числовые параметры.

Интеграл G_i можно представить в виде:

$$\int_{t_0}^T (\Delta_i^2 + k_{1i} \cdot \dot{\Delta}_i^2 + k_{2i} \cdot \ddot{\Delta}_i^2) dt = \int (\ddot{\Delta}_i + \gamma_{1i} \cdot \dot{\Delta}_i + \gamma_{0i} \cdot \Delta_i)^2 dt + C_i(\Delta_0, \dot{\Delta}_0),$$

где $C_i(\Delta_0, \dot{\Delta}_0)$ – некоторые постоянные зависящие от начального состояния управляемого механизма.

Минимум функционала реализуется на траекториях, на которых выполняется условие:

$$\ddot{\Delta}_i + \gamma_{1i} \cdot \dot{\Delta}_i + \gamma_{0i} \cdot \Delta_i = 0 \quad (6.1)$$

где γ_{1i}, γ_{0i} – постоянные коэффициенты

Для построения управляющих сил P_i необходимо выполнение условия, чтобы ошибки в переходном процессе являлись решением уравнения (6.1). Для нахождения коэффициентов уравнения (6.1) перепишем выражение в форме, соответствующей колебательному звену:

$$\tau_i^2 \ddot{\Delta}_i + 2\zeta_i \tau_i \cdot \dot{\Delta}_i + \Delta_i = 0 \quad (6.2)$$

$$\tau_i^2 = \frac{1}{\gamma_{0i}}, \quad 2\zeta_i \tau_i = \frac{\gamma_{1i}}{\gamma_{0i}},$$

где τ_i – постоянные времени,

ζ_i – коэффициент затухания (демпфирования) собственных колебаний.

В технике автоматических систем наиболее предпочтительным режимом является

режим с коэффициентом затухания собственных колебаний $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. При этом ве-

личина перерегулирования $\sigma \approx 5\%$. Длительность переходных процессов при этом

составляет $t \approx \frac{3 \cdot \tau}{\xi}$ с. В установившемся движении при $t \rightarrow \infty$ выполняются соот-

ношения для абсолютных координат:

$$x_T(t) \rightarrow x(t), \quad y_T(t) \rightarrow y(t), \quad z_T(t) \rightarrow z(t).$$

Таким образом, начиная с некоторого заданного момента времени t , при соответствующем подборе коэффициентов обратной связи произойдет затухание

переходных процессов $\Delta(t) \rightarrow 0$. В таком случае в процессе управления движение исполнительного механизма осуществляется по назначенной траектории с момента времени t .

Закон изменения ошибки должен соответствовать колебательному звену, при этом обеспечивается устойчивость и минимизации ошибки по положению, скорости и ускорения. Закон изменения ускорения имеет вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{x}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{x}_T - \dot{x}) + \gamma_0 \cdot (x_T - x) \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{y}_T - \dot{y}) + \gamma_0 \cdot (y_T - y) \\ \ddot{z} &= \ddot{z}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{z}_T - \dot{z}) + \gamma_0 \cdot (z_T - z)\end{aligned}\quad (6.3)$$

Тогда, искомые законы управления могут быть найдены подстановкой ускорений в уравнения движения:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{A}(q) \cdot \ddot{q} + \mathbf{B}(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}_i, \quad i=1, \dots, n$$

Эти соотношения определяют искомые законы формирования управляющих сил и моментов, реализующих движение по назначенной траектории.

Анализ развития робототехники показывает, что в последние годы активно в промышленных роботах используются электроприводы. Нагрузкой всех приводов является механизм манипулятора. На вход каждого из приводов подается управляющий сигнал. Выходом системы является вектор обобщенных координат манипулятора q_i , или вектор перемещений выходного звена. Рассмотрим привод на базе электродвигателя постоянного тока. Уравнение двигателя имеет следующий вид:

$$U = k_\omega \cdot \omega + R \cdot I + L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$I = \frac{M_i}{k_m}$$

где R – сопротивление якоря двигателя,

k_m – коэффициент пропорциональности,

k_ω , – коэффициент противоЭДС,

L – индуктивность якоря,

I – ток в цепи якоря,

U – управляющее напряжение.

При проектировании привода механизма следует учитывать мощность и момент для обеспечения требуемых динамических свойств управления при быстром изменении их параметров. Также постоянная времени τ должна быть больше постоянной двигателя τ_m , рассчитываемой по формуле:

$$\tau_m = \frac{JR}{k_m k_\omega}$$

где J – момент инерции двигателя.

Так как двигатели стоят на основании, то это позволяет выбирать двигатели с запасом по мощности.

Таким образом, предложен алгоритм управления механизмом параллельной структуры, минимизирующий ошибку по положению, скорости, ускорения.

6.2 Управление поступательно-направляющим механизмом

Рассмотрим задачу управления поступательно-направляющим механизмом параллельной структуры с тремя степенями свободы [115, 214]. Математическая модель исполнительной системы состоит из уравнения движения механизма.

При перемещениях в приводах на элементарные расстояния соответственно $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3$ используя принцип возможных перемещений имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + m\ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + mg \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + m_1 \ddot{q}_1 + P_1 \delta q_1 &= 0 \\ m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + m\ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + mg \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + m_2 \ddot{q}_2 + P_2 \delta q_2 &= 0; \quad (6.4) \\ m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_3} \delta q_3 + m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_3} \delta q_3 + m\ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_3} \delta q_3 + mg \frac{\partial z}{\partial q_3} \delta q_3 + m_3 \ddot{q}_3 + P_3 \delta q_3 &= 0 \end{aligned}$$

где m_1, m_2, m_3 – масса входных звеньев соответствующих цепей,

m – масса выходного звена,

P_1, P_2, P_3 – силы в приводах,

$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – ускорения выходного звена,

$\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3$ – ускорения в приводах,

$\frac{\partial x}{\partial q_i}, \frac{\partial y}{\partial q_i}, \frac{\partial z}{\partial q_i}$ – переменные коэффициенты.

Переменные коэффициенты $\frac{\partial x}{\partial q_i}, \frac{\partial y}{\partial q_i}, \frac{\partial z}{\partial q_i}$ определяются из уравнений свя-

зей, записанных в виде неявных функций от абсолютных и обобщенных координат $F_i(x, y, z, q_i) = 0$. В этих функциях переменная q_i в свою очередь представлена как функция переменных x, y, z . Дифференцируя каждую из этих неявных функций по переменным x, y, z получаем систему уравнений, связывающие скорости входных и выходных звеньев:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial F_i}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0 \quad i=1, 2, 3,$$

Из полученных выражений получаем формулы для определения искомым переменных коэффициентов:

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} = -\frac{\partial F_i}{\partial q_i} / \frac{\partial F_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_i} = -\frac{\partial F_i}{\partial q_i} / \frac{\partial F_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_i} = -\frac{\partial F_i}{\partial q_i} / \frac{\partial F_i}{\partial z}.$$

В уравнения движения входят значения ускорений входных и выходных звеньев. Из уравнения ускорений необходимо выразить ускорения входных звеньев через ускорения выходных.

Проведем численное моделирование движения выходного звена механизма параллельной структуры по заданной траектории с помощью разработанного алгоритма оптимального управления движением.

Для моделирования оптимального алгоритма управления запишем уравнения движения в абсолютной системе координат, т.е. выходное звено перемещается на расстояния $\delta x, \delta y, \delta z$, что соответствует соотношениям:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}\delta x + P_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} \delta x + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} \delta x + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial x} \delta x + m_1 \ddot{q}_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} \delta x + m_2 \ddot{q}_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} \delta x + m_3 \ddot{q}_3 \frac{\partial q_3}{\partial x} \delta x &= 0 \\
m\ddot{y}\delta y + P_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} \delta y + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} \delta y + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial y} \delta y + m_1 \ddot{q}_1 \frac{\partial q_1}{\partial y} \delta y + m_2 \ddot{q}_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} \delta y + m_3 \ddot{q}_3 \frac{\partial q_3}{\partial y} \delta y &= 0 \\
m\ddot{z}\delta z + P_1 \frac{\partial q_1}{\partial z} \delta z + P_2 \frac{\partial q_2}{\partial z} \delta z + P_3 \frac{\partial q_3}{\partial z} \delta z + m_1 \ddot{q}_1 \frac{\partial q_1}{\partial z} \delta z + m_2 \ddot{q}_2 \frac{\partial q_2}{\partial z} \delta z + \\
+ m_3 \ddot{q}_3 \frac{\partial q_3}{\partial z} \delta z + mg\delta z &= 0
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Ускорения в приводах рассчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \ddot{x}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{x}_T - \dot{x}) + \gamma_0 \cdot (x_T - x) \\
\ddot{y} &= \ddot{y}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{y}_T - \dot{y}) + \gamma_0 \cdot (y_T - y); \\
\ddot{z} &= \ddot{z}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{z}_T - \dot{z}) + \gamma_0 \cdot (z_T - z)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Силы P_i могут быть найдены подстановкой ускорений $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ из уравнений (6.6) в уравнения движения (6.5) и реализуют движение по заданному закону:

$$\begin{aligned}
P_i &= m(\ddot{x}_T + \gamma_1(\dot{x}_T - \dot{x}) + \gamma_0(x_T - x)) \frac{\partial x}{\partial q} + m(\ddot{y}_T + \gamma_1(\dot{y}_T - \dot{y}) + \gamma_0(y_T - y)) \frac{\partial y}{\partial q} + \\
&+ m(\ddot{z}_T + \gamma_1(\dot{z}_T - \dot{z}) + \gamma_0(z_T - z)) + mg \frac{\partial z}{\partial q} + m_i \ddot{q}_i
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Зададим закон движения исполнительного звена:

$$x_T(t) = 0,1 \cdot \sin(\omega t), \quad y_T(t) = 0,12 \cdot \sin(\omega t), \quad z_T(t) = 0,15 \cdot \sin(\omega t).$$

Зададим массу выходного звена с грузом 5 кг, массу входных звеньев 1кг, при частоте $\omega=15$ рад/с.

В результате численного моделирования движения механизма по заданному закону без учета обратных связей ($\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 0$) показано изменение ошибки по положению. Графики изменения ошибки показан на рис.6.1, 6.2.

Управление, не учитывающее обратные связи системы, не удовлетворяет требованиям осуществления назначенного закона изменения координат и скорости с заданной точностью, так как неизбежные погрешности в вычислении силы приведут в результате интегрирования дифференциального уравнения второго порядка к быстрому накоплению ошибок. Следовательно, возникает необходимость построения управления движением механизма с введением обратных связей по поло-

жению и скорости.

Рассмотрим движение с обратной связью. Зададим коэффициент демпфирования $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и время переходного процесса $t=0,05$ с. При этом постоянная времени будет равна $\tau \approx 0,011$ с, а коэффициенты обратной связи будут равны $\gamma_0 = 7200$, $\gamma_1 = 120$. Здесь не рассматриваем параметры двигателя и предельно допустимые значения обобщенных сил. В этом случае закон изменения ускорения (6.6) принимает вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{x}_T + 120 \cdot (\dot{x}_T - \dot{x}) + 7200 \cdot (x_T - x) \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_T + 120 \cdot (\dot{y}_T - \dot{y}) + 7200 \cdot (y_T - y); \\ \ddot{z} &= \ddot{z}_T + 120 \cdot (\dot{z}_T - \dot{z}) + 7200 \cdot (z_T - z),\end{aligned}\quad (6.8)$$

При движении с обратной связью график изменения ошибки, координаты, скорости и силы в приводе показаны на рис. 6.3, 6.4, 6.5.

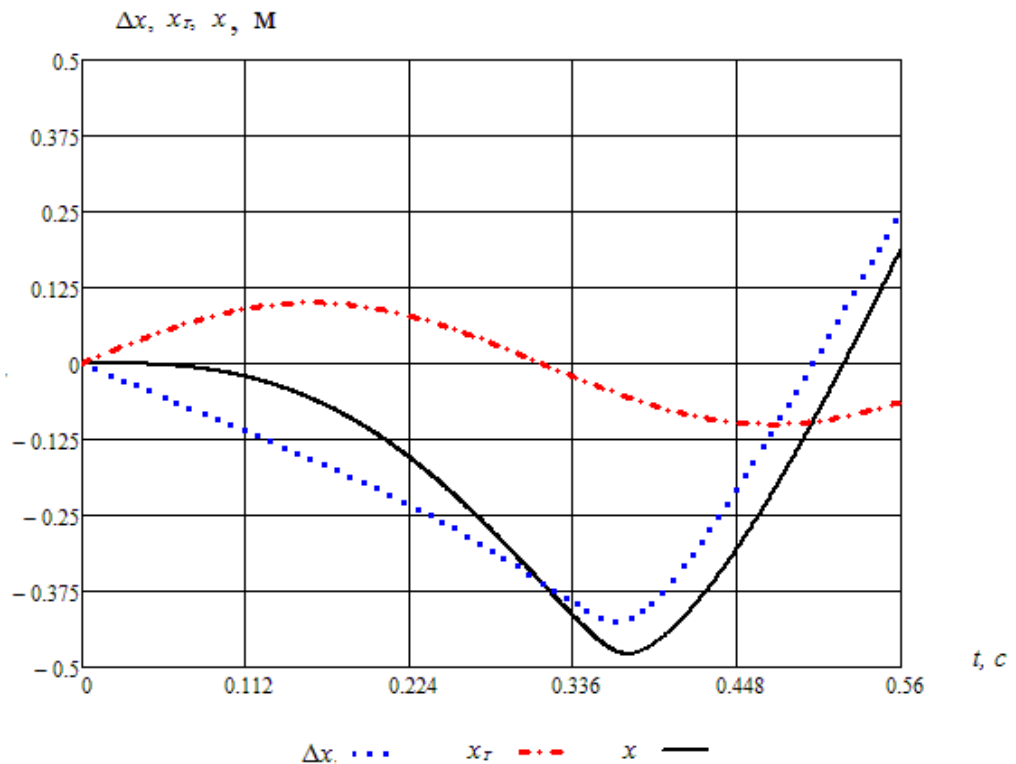


Рис.6.1. График изменения теоретической x_T координаты, фактической x координаты, ошибки положения Δx при управлении механизмом без обратной связи

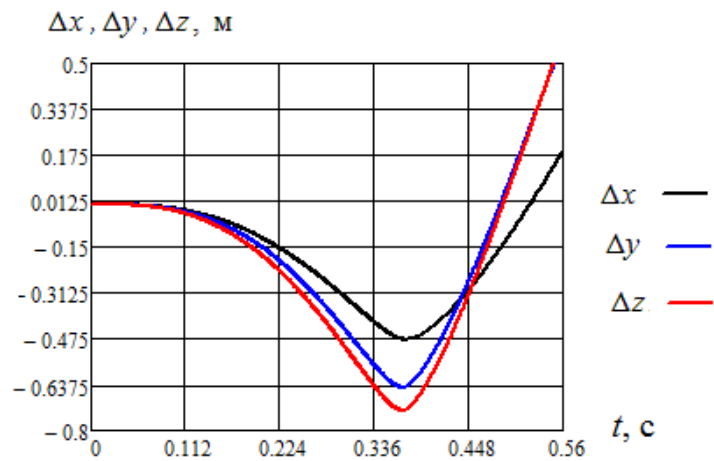


Рис.6.2. График изменения ошибки $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ при управлении механизмом без обратной связи

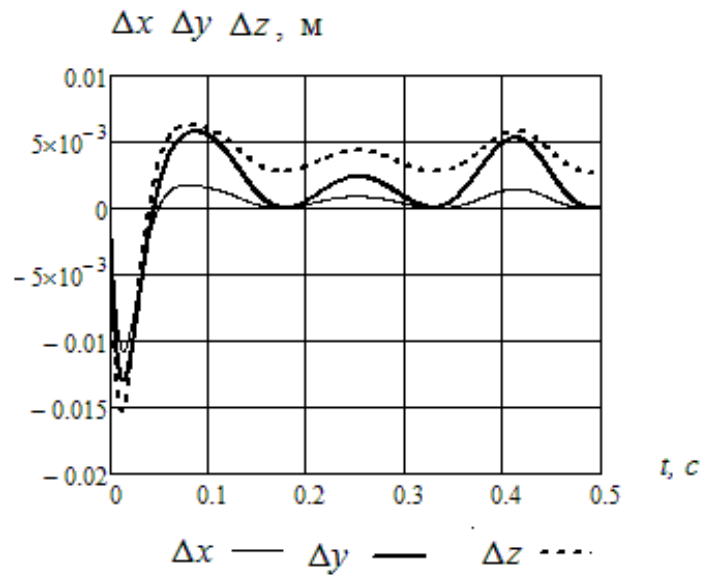


Рис.6.3. График изменения ошибки координаты.

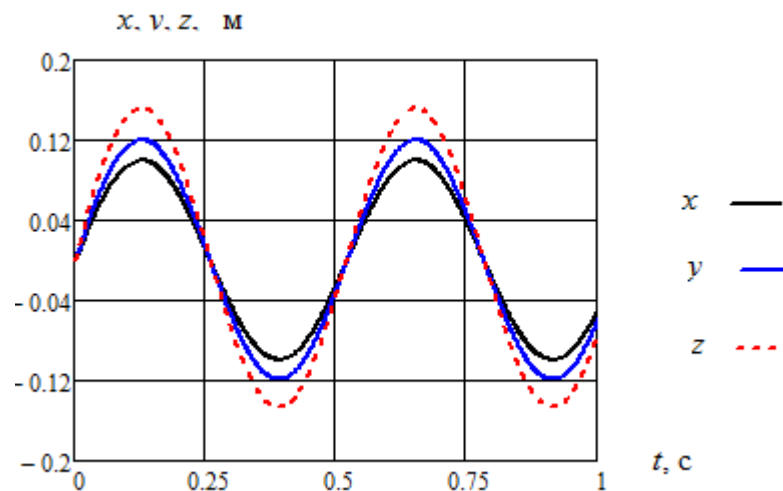


Рис.6.4 График изменения фактической координаты x, y, z

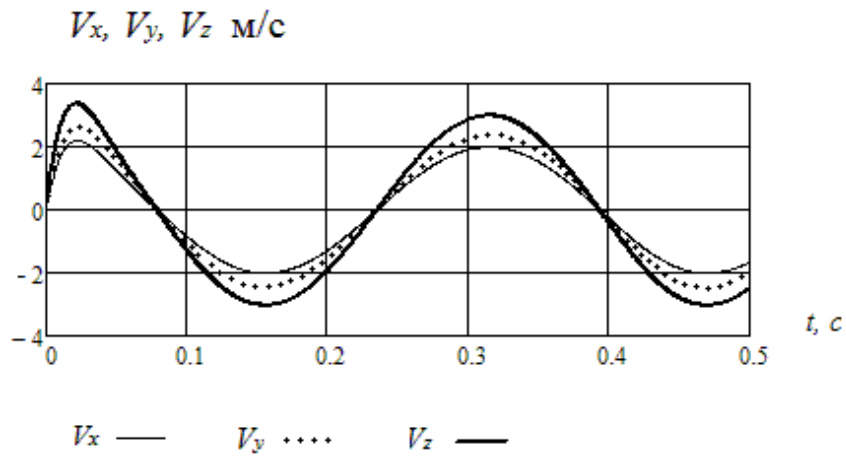


Рис. 6.5 График изменения скорости выходного звена

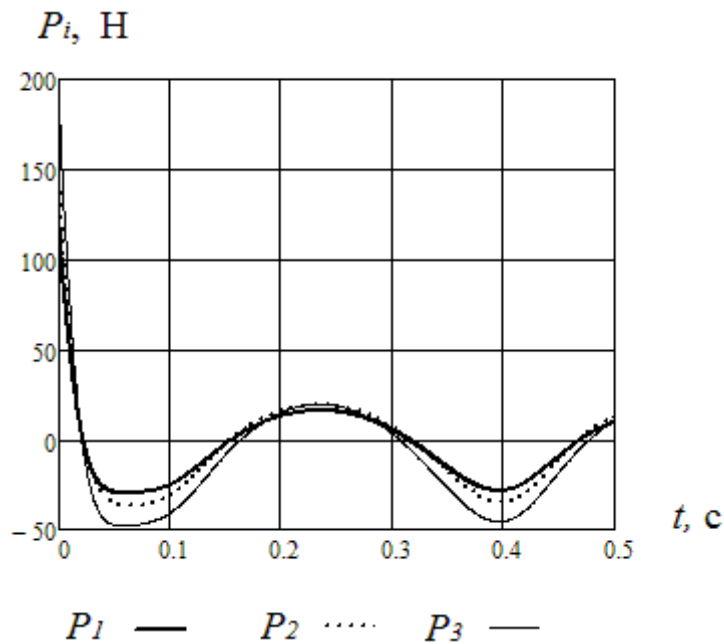
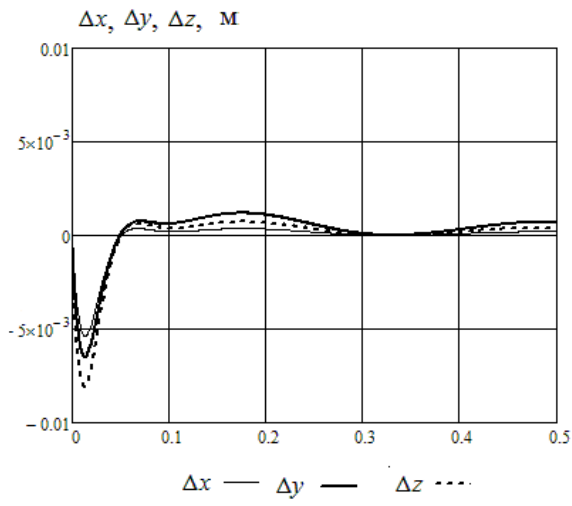


Рис.6.6 График изменения силы в приводе

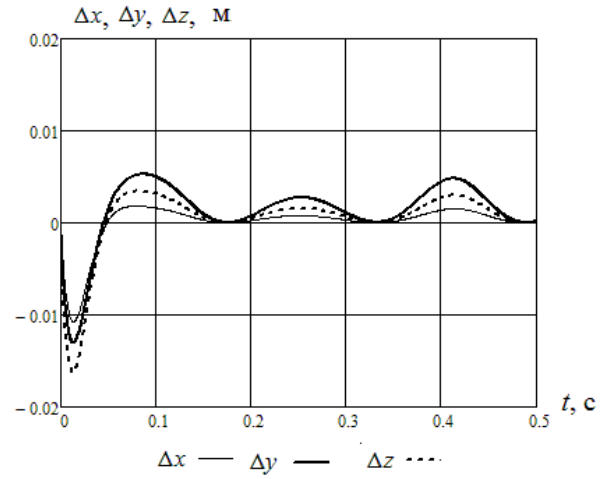
Рассмотрим влияние частоты в законе движения на величину ошибки положения выходного звена. При выбранных коэффициентов обратной связи собственная частота системы управления равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\gamma_0 - \frac{\gamma_1^2}{4}} = 60 \text{ рад/с.}$$

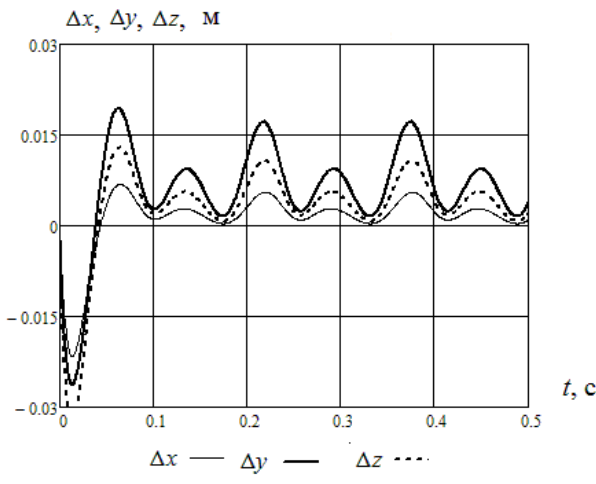
При частотах закона движения $\omega=10$ рад/с, $\omega=20$ рад/с, $\omega=40$ рад/с, $\omega=60$ рад/с ошибка положения показана на рис.6.7, а закон изменения силы в приводах на рис.6.8. Таким образом, показано, что увеличение частоты в законах движения выходного звена приводит к возрастанию ошибки и усилия в приводах.



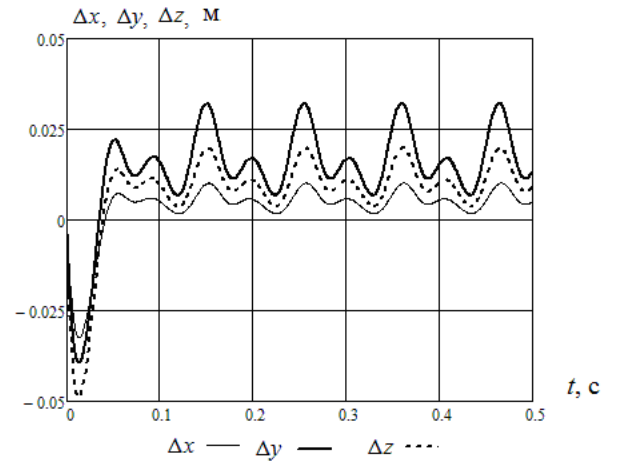
а)



б)



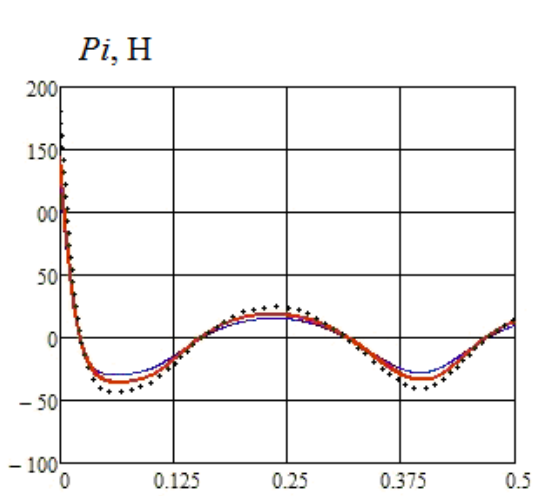
в)



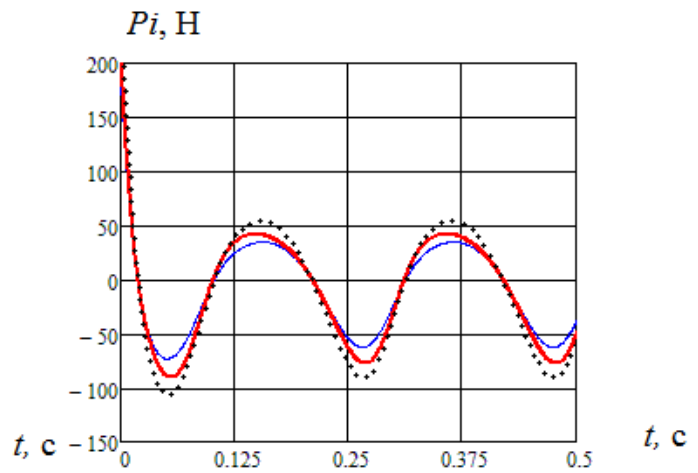
г)

Рис. 6.7. График изменения ошибки положения

а – $\omega=10$ рад/с, б – $\omega=20$ рад/с, в – $\omega=40$ рад/с, г – $\omega=60$ рад/с



а)



б)

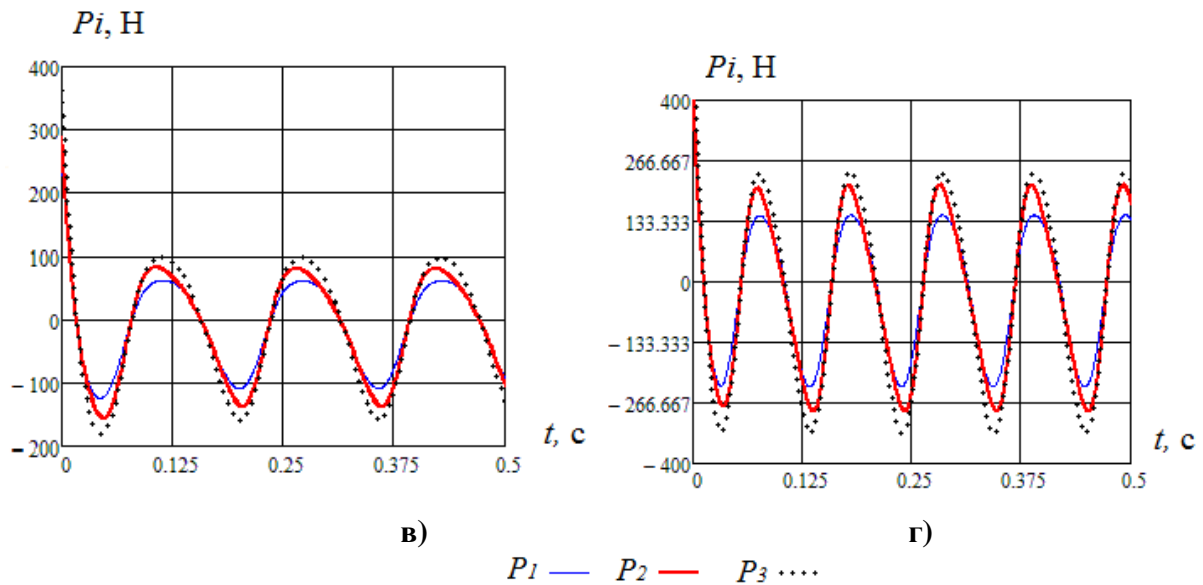


Рис. 6.8. График изменения сил в приводе

а – $\omega=20$ рад/с, б – $\omega=30$ рад/с, в – $\omega=40$ рад/с, г – $\omega=60$ рад/с

Важным является вопрос, как влияет отклонение массы входного звена от массы входного звена модели. Рассмотрим два случая, когда массой входного звена в модели пренебрегали, т.е. принимали равной нулю и равной фактической массе. Графики отклонения выходного звена соответственно представлены на рис. 6.9. Как видно из полученных зависимостей, в предложенном алгоритме возможно пренебречь массой входного звена, т.к. разность в отклонениях в ошибке положения выходного звена не превышает 5%.

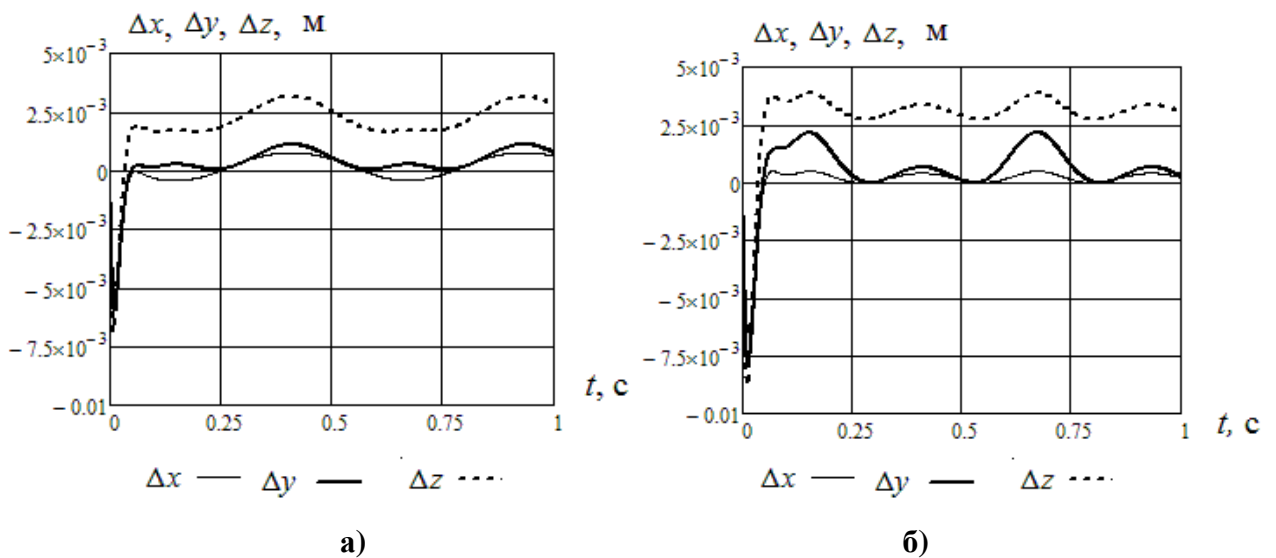


Рис. 6.9. График изменения ошибки

а – масса входных звеньев равна массе входных звеньев в модели

б – масса входных звеньев равна нулю

Рассмотрим случай, когда масса выходного звена не равна массе выходного звена в модели. Зададим массу выходного звена на 30% отличающуюся от массы выходного звена модели (рис.6.10).

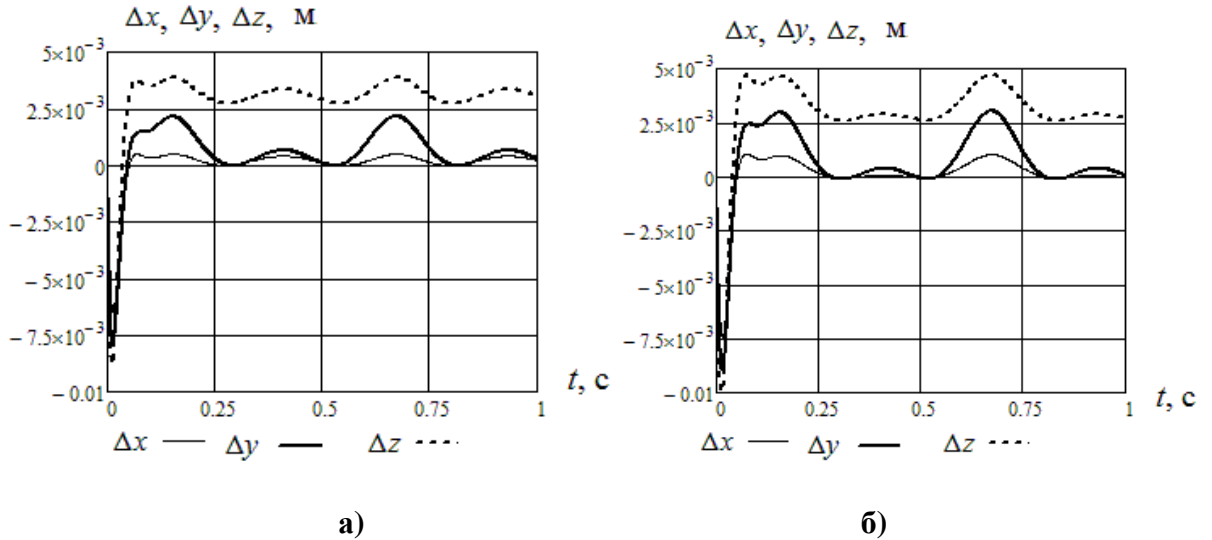


Рис.6.10. График изменения ошибки

а – масса выходного звена равна массе выходного звена модели,

б – масса выходного звена превышает массу выходного звена модели 20%

Как видно из полученных зависимостей, при отклонении массы выходного звена робота от массы выходного звена модели в пределах 30% отклонение в ошибке положения не превышает 3%.

Рассмотрим движение выходного звена по окружности, описываемое следующим законом движения:

$$x_T(t) = 0,1 \cdot \sin(\omega t), \quad y_T(t) = 0,1 \cdot \cos(\omega t), \quad z_T(t) = 0.$$

Длительность цикла составляет 0,20 с, при частоте $\omega=45$ рад/с. На графиках показано изменение ошибки положения (рис.6.11 а), траектория движения выходного звена (рис.6.11 б), изменение сил в приводе (6.11 в)

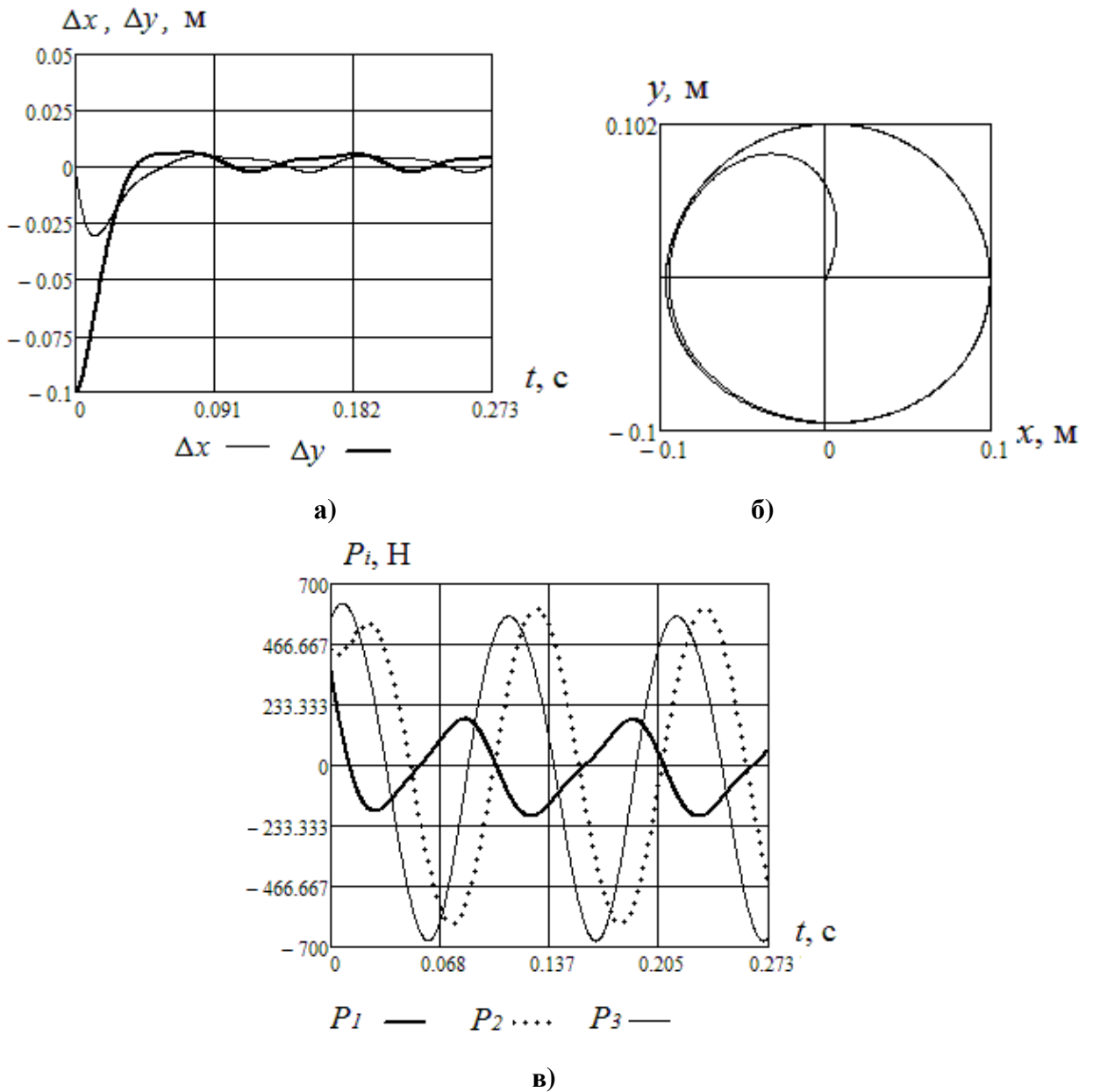


Рис. 6.11 График изменения:

а – ошибки положения выходного звена,

б – траектории движения выходного звена, **в** – сил в приводах

Таким образом, представлена модель управления поступательно-направляющим механизмом. Показано, что одним из важных критериев является абсолютная величина ошибки положения выходного звена. Рассмотрены примеры влияния точности при отклонения механизма от модели, а также влияние собственной частоты ошибки от частоты закона движения.

6.3. Управление сферическим механизмом

В рассматриваемом механизме (рис.4.13) каждое входное звено цепи соединено с двигателем. Выходное звено представляет собой платформу, которая вращается вокруг трех осей, пересекающихся в точке O .

Выходному звену механизма поставим в соответствие подвижную систему координат ξ, η, ζ , оси которой расположены по главным центральным осям инерции этого звена. При нулевых значениях углов ориентации ($\alpha=\beta=\gamma=0$) направления осей ξ, η, ζ совпадают с направлениями осей соответственно x, y, z .

Кроме того, в данном случае одна кинематическая пара e'_{i2} , входящая в эквивалентный механизм (рис.4.11), заменяет три вращательные пары e_{i2}, e_{i3}, e_{i4} , входящие в исходный механизм. Отметим, что при нулевых углах ориентации имеет место соотношение $e_{11}=e'_{32}=e_{23}$. Для остальных кинематических цепей имеются аналогичные соотношения.

Уравнение движения сферического механизма с тремя степенями свободы имеет вид:

$$\begin{cases} J_{\xi} \cdot \ddot{\varphi}_{\xi} = M_1 \cdot \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{\xi}} + M_2 \cdot \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \varphi_{\xi}} + M_3 \cdot \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_{\xi}} + \dot{\varphi}_{\eta} \cdot \dot{\varphi}_{\zeta} \cdot (J_{\zeta} - J_{\eta}) \\ J_{\eta} \cdot \ddot{\varphi}_{\eta} = M_1 \cdot \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{\eta}} + M_2 \cdot \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \varphi_{\eta}} + M_3 \cdot \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_{\eta}} + \dot{\varphi}_{\xi} \cdot \dot{\varphi}_{\zeta} \cdot (J_{\xi} - J_{\zeta}) \\ J_{\zeta} \cdot \ddot{\varphi}_{\zeta} = M_1 \cdot \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{\zeta}} + M_2 \cdot \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \varphi_{\zeta}} + M_3 \cdot \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_{\zeta}} + \dot{\varphi}_{\xi} \cdot \dot{\varphi}_{\eta} \cdot (J_{\eta} - J_{\xi}) \end{cases} \quad (6.9)$$

где $J_{\xi} = J_{\eta}, J_{\zeta}$ – моменты инерции относительно осей ξ, η, ζ

M_1, M_2, M_3 – моменты в приводах;

$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \varphi_{\xi}}$ – переменные коэффициенты;

$\ddot{\varphi}_{\xi}, \dot{\varphi}_{\xi}, \ddot{\varphi}_{\eta}, \dot{\varphi}_{\eta}, \ddot{\varphi}_{\zeta}, \dot{\varphi}_{\zeta}$ – проекции ускорений и скоростей на оси ξ, η, ζ .

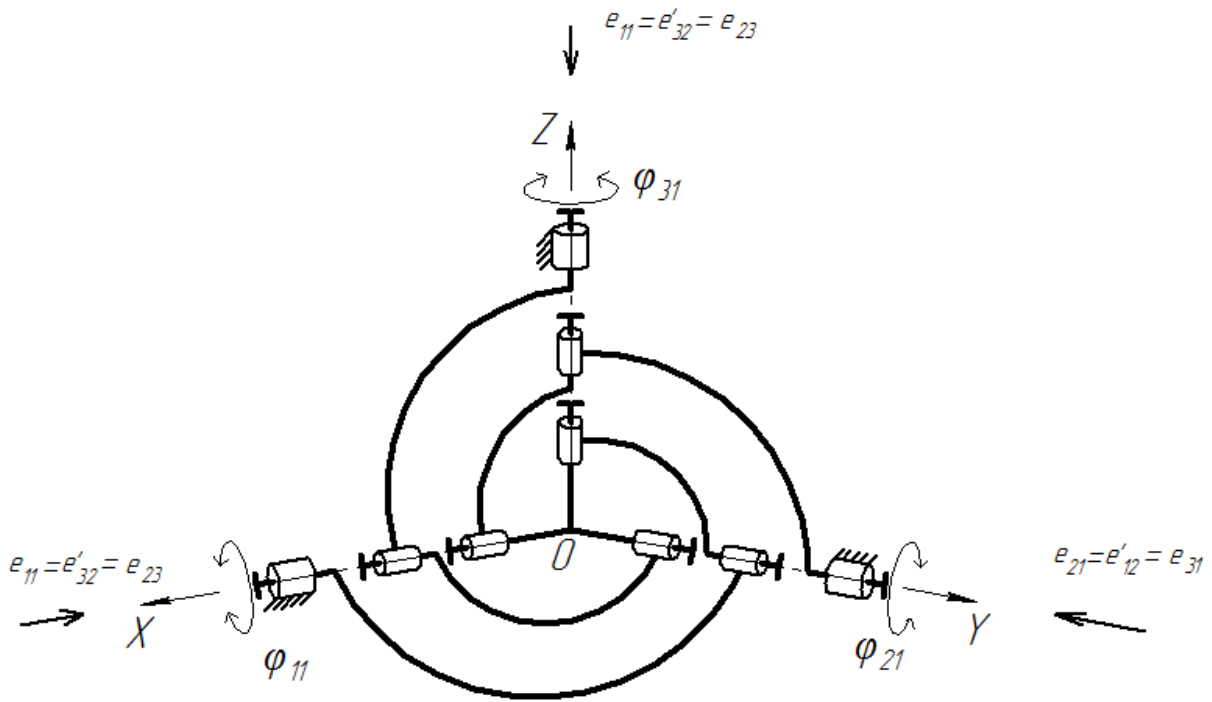


Рис.6.12 Сферический механизм с тремя степенями свободы и тремя кинематическими парами

Система уравнений для трех кинематических цепей имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \omega_{\xi} \cdot r_{1\xi}^0 + \omega_{\eta} \cdot r_{1\eta}^0 + \omega_{\zeta} \cdot r_{1\zeta}^0 &= \omega_{11} \cdot (x_{11}r_{1x}^0 + y_{11}r_{1y}^0 + z_{11}r_{1z}^0); \\
 \omega_{\xi} \cdot r_{2\xi}^0 + \omega_{\eta} \cdot r_{2\eta}^0 + \omega_{\zeta} \cdot r_{2\zeta}^0 &= \omega_{21} \cdot (x_{21}r_{2x}^0 + y_{21}r_{2y}^0 + z_{21}r_{2z}^0); \\
 \omega_{\xi} \cdot r_{3\xi}^0 + \omega_{\eta} \cdot r_{3\eta}^0 + \omega_{\zeta} \cdot r_{3\zeta}^0 &= \omega_{31} \cdot (x_{31}r_{3x}^0 + y_{31}r_{3y}^0 + z_{31}r_{3z}^0)
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

где $\omega_{\xi}, \omega_{\eta}, \omega_{\zeta}$ – угловые скорости выходного звена вокруг осей ξ, η, ζ

$r_{i\xi}^0, r_{i\eta}^0, r_{i\zeta}^0$ – координаты моментной части i -го силового винта.

Тогда переменные коэффициенты, стоящие перед значениями моментов M , можно определить из уравнения (6.10) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{\xi}} &= \frac{\omega_{11}}{\omega_{\xi}} = \frac{r_{1\xi}^0}{r_{1x}^0}; & \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{\eta}} &= \frac{\omega_{11}}{\omega_{\eta}} = \frac{r_{1\eta}^0}{r_{1x}^0}; & \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{\zeta}} &= \frac{\omega_{11}}{\omega_{\zeta}} = \frac{r_{1\zeta}^0}{r_{1x}^0} = 0 \\
 \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \varphi_{\xi}} &= \frac{\omega_{21}}{\omega_{\xi}} = \frac{r_{2\xi}^0}{r_{2y}^0} = 0; & \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \varphi_{\eta}} &= \frac{\omega_{21}}{\omega_{\eta}} = \frac{r_{2\eta}^0}{r_{2y}^0}; & \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \varphi_{\zeta}} &= \frac{\omega_{21}}{\omega_{\zeta}} = \frac{r_{2\zeta}^0}{r_{2y}^0} \\
 \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_{\xi}} &= \frac{\omega_{31}}{\omega_{\xi}} = \frac{r_{3\xi}^0}{r_{3z}^0}; & \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_{\eta}} &= \frac{\omega_{31}}{\omega_{\eta}} = \frac{r_{3\eta}^0}{r_{3z}^0} = 0; & \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial \varphi_{\zeta}} &= \frac{\omega_{31}}{\omega_{\zeta}} = \frac{r_{3\zeta}^0}{r_{3z}^0}
 \end{aligned}$$

Соотношение между угловыми скоростями в подвижной системе координат ω_{ξ} ,

ω_{η} , ω_{ζ} и скоростями изменения углов $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ равны:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \frac{\omega_{\xi} \cdot \cos \beta + \omega_{\eta} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + \omega_{\zeta} \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \beta}; \\ \dot{\beta} &= \omega_{\eta} \cdot \cos \alpha - \omega_{\zeta} \cdot \sin \alpha; \\ \dot{\gamma} &= \frac{\omega_{\eta} \cdot \sin \alpha + \omega_{\zeta} \cdot \cos \alpha}{\cos \beta}.\end{aligned}\tag{6.11}$$

Зададим требуемое движение выходного звена в виде закона изменения координат: $\alpha_T(t)$, $\beta_T(t)$, $\gamma_T(t)$. Требуемые скорости $\dot{\alpha}_T(t)$, $\dot{\beta}_T(t)$, $\dot{\gamma}_T(t)$ и ускорения $\ddot{\alpha}_T(t)$, $\ddot{\beta}_T(t)$, $\ddot{\gamma}_T(t)$ получаем после дифференцирования. Задача управления состоит в минимизации ошибки по координате:

$$\Delta_1(t) = \alpha_T(t) - \alpha(t), \Delta_2(t) = \beta_T(t) - \beta(t), \Delta_3(t) = \gamma_T(t) - \gamma(t),$$

по скорости:

$$\dot{\Delta}_1(t) = \dot{\alpha}_T(t) - \dot{\alpha}(t), \dot{\Delta}_2(t) = \dot{\beta}_T(t) - \dot{\beta}(t), \dot{\Delta}_3(t) = \dot{\gamma}_T(t) - \dot{\gamma}(t),$$

по ускорению:

$$\ddot{\Delta}_1(t) = \ddot{\alpha}_T(t) - \ddot{\alpha}(t), \ddot{\Delta}_2(t) = \ddot{\beta}_T(t) - \ddot{\beta}(t), \ddot{\Delta}_3(t) = \ddot{\gamma}_T(t) - \ddot{\gamma}(t)$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ – фактические значения координат выходного звена.

Проведем численное моделирование движения выходного звена механизма параллельной структуры по заданной траектории с помощью разработанного алгоритма оптимального управления движением. Зададим коэффициент демпфирования $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и время переходного процесса $t=0,05$ с. При этом постоянная времени будет равна $\tau \approx 0,011$ с, а коэффициенты обратной связи будут равны $\gamma_0 = 7200$, $\gamma_1 = 120$. Для упрощения пренебрегаем массой входных звеньев и силой веса. Здесь не рассматриваем параметры двигателя и предельно допустимые значения обобщенных сил.

Закон изменения ускорения соответствует колебательному звену:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= \ddot{\alpha}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{\alpha}_T - \dot{\alpha}) + \gamma_0 \cdot (\alpha_T - \alpha); \\ \ddot{\beta} &= \ddot{\beta}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{\beta}_T - \dot{\beta}) + \gamma_0 \cdot (\beta_T - \beta); \\ \ddot{\gamma} &= \ddot{\gamma}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{\gamma}_T - \dot{\gamma}) + \gamma_0 \cdot (\gamma_T - \gamma).\end{aligned}\tag{6.12}$$

Из уравнений (6.9) выразим моменты M_i . В полученные выражения моментов подставляем значения ускорений $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$ из уравнений (6.12).

Зададим закон движения исполнительного звена:

$$\alpha_T(t) = 0,1 \cdot \sin(\omega t); \quad \beta_T(t) = 0,12 \cdot \sin(\omega t); \quad \gamma_T(t) = 0,15 \cdot \sin(\omega t)$$

Дифференциальные уравнения ускорения (6.12) принимают вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \ddot{\alpha}_T + 120 \cdot (\dot{\alpha}_T - \dot{\alpha}) + 7200 \cdot (\alpha_T - \alpha) \\ \ddot{\beta} &= \ddot{\beta}_T + 120 \cdot (\dot{\beta}_T - \dot{\beta}) + 7200 \cdot (\beta_T - \beta) \\ \ddot{\gamma} &= \ddot{\gamma}_T + 120 \cdot (\dot{\gamma}_T - \dot{\gamma}) + 7200 \cdot (\gamma_T - \gamma) \end{aligned} \quad (6.13)$$

При движении с обратной связью графики изменений ошибки положения, момента в приводе показаны на рис. 6.13, 6.14.

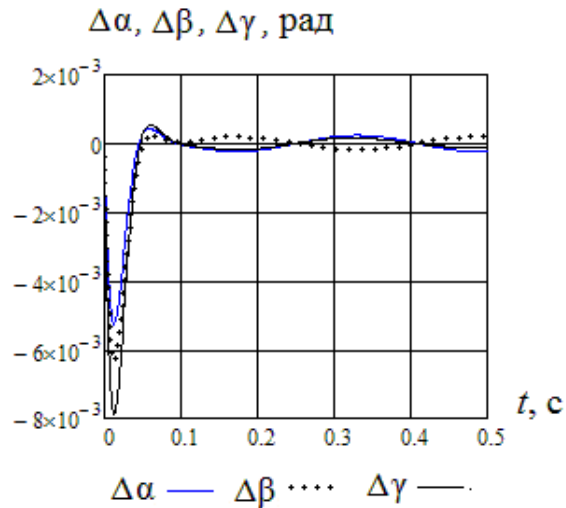


Рис.6.13. График изменения ошибки положения $\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma$ выходного звена

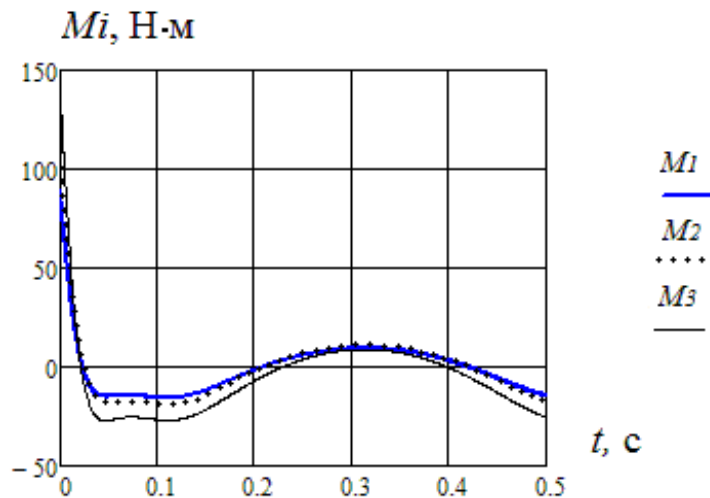


Рис.6.14 График изменения моментов в приводе

Таким образом, представлен алгоритм управления сферическим механизмом параллельной структуры с тремя степенями свободы, обеспечивающий минимизацию ошибки по координате, скорости ускорению

6.4. Управление механизмом при переходе через особое положение

В механизмах параллельной структуры могут проявляться особые положения внутри рабочей зоны, в которых или теряется степень свободы, или происходит потеря управляемости. Вблизи особых положений у манипуляторов параллельной структуры снижается нагрузочная способность.

Для избежания потери управляемости можно предусмотреть дополнительные приводы, включающиеся при приближении к особому положению. Рассмотрим плоский механизм с двумя степенями свободы. Этот механизм предусмотрен в качестве устройства лазерной сварки и резки, где луч отклоняется системой двух зеркал (рис. 1) [26, 92].

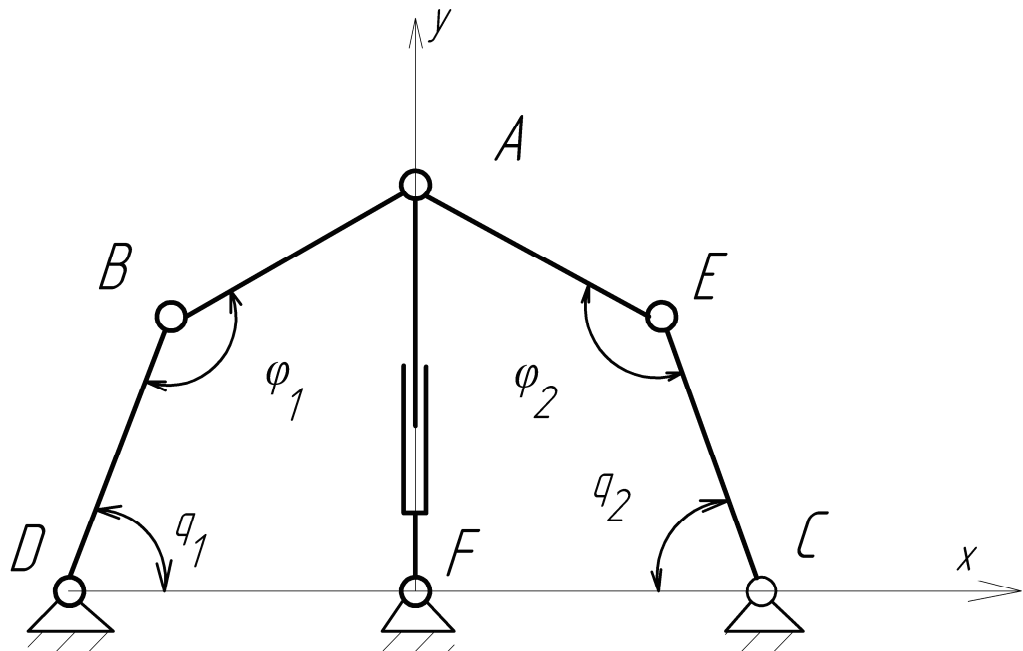


Рис.6.15 Схема механизма лазерной резки

В механизме ведущие звенья BD и CE (длинами L_1) соединены с приводами, установленными на основании, а два других звена AB и AE (длиной L_2) связаны шарнирно между собой, которые перемещают цепь, сопряженную с лазером. Эти

звенья перемещают кинематическую цепь AF , которая сопряжена с лазером, установленным на основании. Вдоль оси вращательной пары F расположена оптическая ось лазера. Луч отклоняется двумя зеркалами, расположенными в точках A , F . Рассматриваемый механизм состоит из пяти кинематических цепей.

При перемещении в приводах на элементарное расстояние соответственно $\delta q_1, \delta q_2$ имеем следующие уравнения динамики:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + m\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + J\ddot{q}_1\delta q_1 + M_1\delta q_1 &= 0; \\ m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + m\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + J\ddot{q}_2\delta q_2 + M_2\delta q_2 &= 0; \end{aligned} \quad (6.14)$$

где J – моменты инерции входных звеньев соответствующих цепей, m – масса выходного звена;

$\frac{\partial x}{\partial q_i}$ – переменные коэффициенты.

Для численного моделирования движения составим также уравнение движение в следующем виде (при перемещении выходного звена на расстояния $\delta x, \delta y$):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\delta x + P_1\frac{\partial q_1}{\partial x}\delta x + P_2\frac{\partial q_2}{\partial x}\delta x + m_1\ddot{q}_1\frac{\partial q_1}{\partial x}\delta x + m_2\ddot{q}_2\frac{\partial q_2}{\partial x}\delta x &= 0; \\ m\ddot{y}\delta y + P_1\frac{\partial q_1}{\partial y}\delta y + P_2\frac{\partial q_2}{\partial y}\delta y + m_1\ddot{q}_1\frac{\partial q_1}{\partial y}\delta y + m_2\ddot{q}_2\frac{\partial q_2}{\partial y}\delta y &= 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Уравнения связей можно представить системой уравнений в общем виде:

$$\begin{aligned} F_1 &= L_2^2 - (x_c + L_1 \cdot \cos(q_1) - x)^2 - (y_c + L_1 \cdot \sin(q_1) - y)^2 = 0 \\ F_2 &= L_2^2 - (x_d + L_1 \cdot \cos(q_2) - x)^2 - (y_d + L_1 \cdot \sin(q_2) - y)^2 = 0; \end{aligned} \quad (6.16)$$

где $(x_D, y_D), (x_C, y_C)$ – координаты точек D, C , в которых расположены приводы;

L_1, L_2 – длины звеньев;

q_1, q_2 – углы в приводах;

(x, y) – координаты выходного звена.

Из кинематического уравнения выразим q_1, q_2 :

$$q_1 = 2 \arctg \frac{\sqrt{-(x^2 - 2xx_c + y^2 + x_c^2 + 2L_1L_2 - L_1^2 - L_2^2)(x^2 - L_1^2 - L_2^2 - 2L_1L_2 - 2xx_c + y^2 + x_c^2)} \pm 2L_1y}{2Lx - 2xx_c + x^2 + y^2 - 2Lx_c + x_c^2 + L_1^2 - L_2^2}$$

$$q_2 = 2 \arctg \frac{\sqrt{-(x^2 - 2xx_d + y^2 + x_d^2 + 2L_1L_2 - L_1^2 - L_2^2)(x^2 - L_1^2 - L_2^2 - 2L_1L_2 - 2xx_d + y^2 + x_d^2)} \pm 2L_1y}{2Lx - 2xx_d + x^2 + y^2 - 2Lx_d + x_d^2 + L_1^2 - L_2^2}$$

Особые положения могут быть определены исследованием свойств матриц Якоби, составленных из уравнений связи. Уравнение скоростей запишем в виде:

$$(\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{V}) = -(\mathbf{B}) \cdot (\dot{\mathbf{q}}) \quad (6.17)$$

где \mathbf{V} – скорости выходного звена, $\dot{\mathbf{q}}$ – скорости входных звеньев.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & \frac{\partial F_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial q_1} & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_1} = 2L_1 \cos q_1 (y - L_1 \sin q_1) + 2L_1 \sin q_1 (x_d - x + L_1 \cos q_1); \quad \frac{\partial F_1}{\partial q_2} = 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_2} = 2L_1 \cos q_2 (y - L_1 \sin q_2) + 2L_1 \sin q_2 (x_c - x + L_1 \cos q_2); \quad \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = 0;$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2L_1 \cos q_1 - 2x + 2x_d; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2L_1 \sin q_1 - 2y; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2L_1 \cos q_2 - 2x + 2x_c;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = 2L_1 \sin q_2 - 2y.$$

В особых положениях определитель одной из матриц \mathbf{A} или \mathbf{B} равен нулю. Так например, одним из особых положений является точка с координатами $(0; L_1 \cdot \sin\left(\frac{L_2 - x_D}{L_1}\right))$. В этой точке звенья механизма выстраиваются в одну линию

(рис. 3), а определитель матрицы \mathbf{A} равен нулю. Зададим коэффициент демпфирования $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и время переходного процесса $t=0,05$ с. При этом постоянная времени будет равна $\tau \approx 0,11$ с, а коэффициенты обратной связи будут равны $\gamma_0=7200$,

$\gamma_1=120$. Для упрощения пренебрегаем массой входных звеньев и силой веса. Здесь не рассматриваем параметры двигателя и предельно допустимые значения обобщенных сил.

Закон изменения ускорения описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{x}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{x}_T - \dot{x}) + \gamma_0 \cdot (x_T - x); \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{y}_T - \dot{y}) + \gamma_0 \cdot (y_T - y)\end{aligned}\quad (6.18)$$

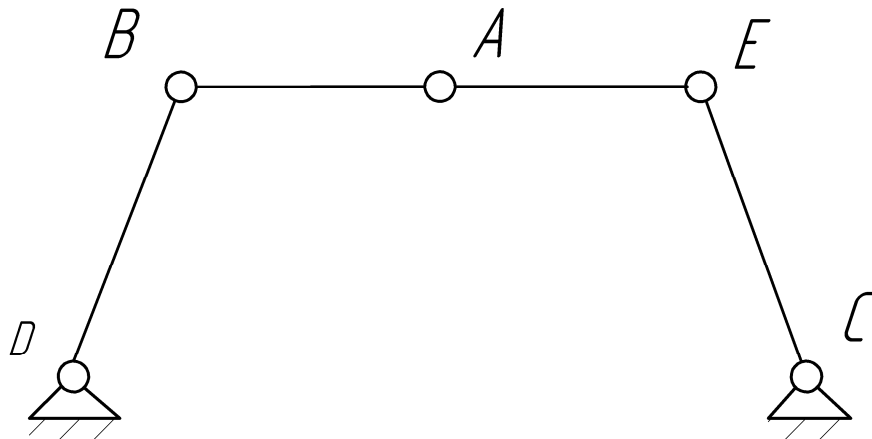


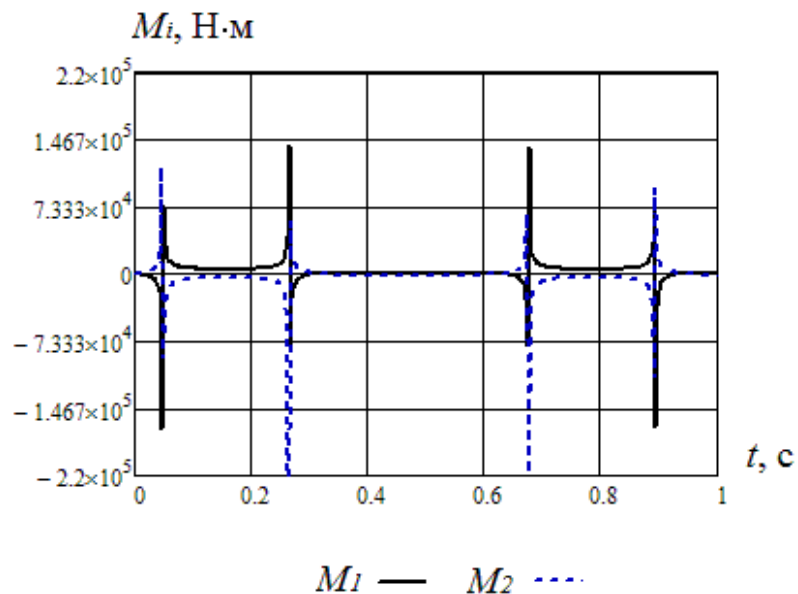
Рис. 6.16 Особое положение механизма

Моменты M_i могут быть найдены подстановкой ускорений \ddot{x}, \ddot{y} из уравнений (6.16) в уравнения движения (6.12) и реализуют движение по заданному закону:

$$M_i = m(\ddot{x}_T + \gamma_1(\dot{x}_T - \dot{x}) + \gamma_0(x_T - x))\frac{\partial x}{\partial q} + m(\ddot{y}_T + \gamma_1(\dot{y}_T - \dot{y}) + \gamma_0(y_T - y))\frac{\partial y}{\partial q} + J_i\ddot{q}_i \quad (6.19)$$

Зададим закон движения $x=0$; $y=0,15 \cdot \sin(10 \cdot t)$; массу выходного звена $m=10$ кг, длины звеньев $L_1=L_2=0,2$ м, координаты точек D, C соответственно $(-0,3; 0)$, $(0,3; 0)$.

В результате численного моделирования движения механизма по заданному закону получены значения моментов в приводах (рис.3 а,б).



а)

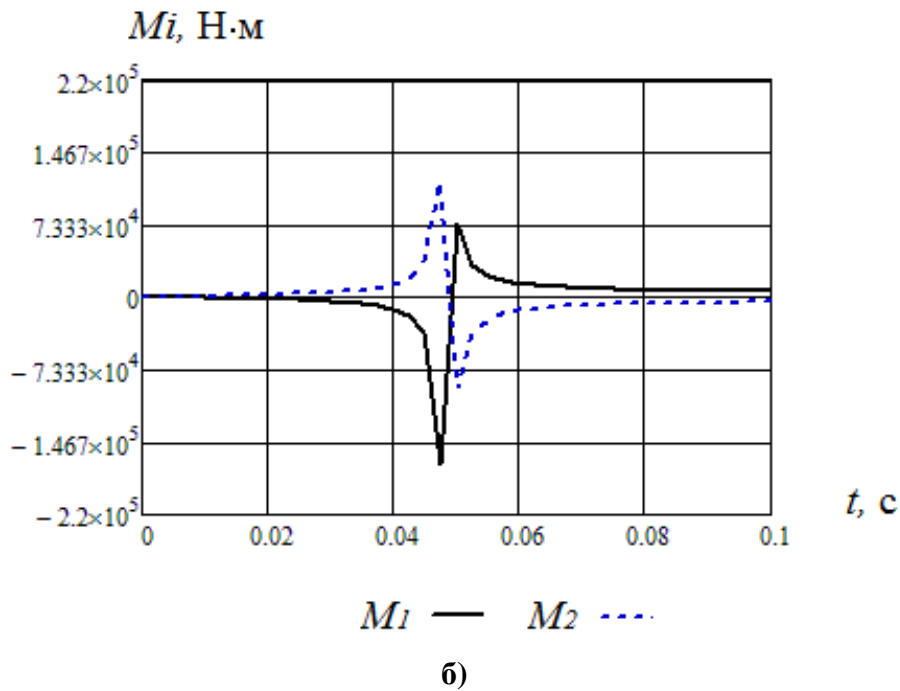


Рис.6.17 График изменения сил в приводе в первом особом положении

а – при $t=0 - 1$ с,

б – при $t=0 - 0,1$ с

Точка особого положения имеет координаты $(0; 0,1414$ м). При приближении к особому положению происходит резкое увеличение момента в приводе, поэтому необходимо предусмотреть перераспределение нагрузки с учетом дополнительных приводов. Дополнительный привод располагаем в точках B, E .

В этом случае задача о положении записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 F_1^* &= \left((L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\varphi_1) \right) - (x - x_D)^2 - (y - y_D)^2; \\
 F_2^* &= \left((L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\varphi_2) \right) - (x - x_c)^2 - (y - y_c)^2
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Выразим φ_1, φ_2 из уравнения задачи о положении:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \pm 2\arccos\left(\frac{L_1^2 + L_2^2 - y^2 - (x - x_d)^2}{2 \cdot L_1 \cdot L_2} \right) \\
 \varphi_2 &= \pm 2\arccos\left(\frac{L_1^2 + L_2^2 - y^2 - (x - x_c)^2}{2 \cdot L_1 \cdot L_2} \right)
 \end{aligned}$$

При перемещении в приводах на элементарное расстояние соответственно $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2$ имеем следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial \varphi_1} \delta \varphi_1 + m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial \varphi_1} \delta \varphi_1 - J\ddot{q}_1 \frac{\partial q_1}{\partial \varphi_1} \delta \varphi_1 + M_1^* \delta \varphi_1 &= 0; \\
m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial \varphi_2} \delta \varphi_2 + m\ddot{y} \frac{\partial y}{\partial \varphi_2} \delta \varphi_2 - J\ddot{q}_2 \frac{\partial q_2}{\partial \varphi_2} \delta \varphi_2 + M_2^* \delta \varphi_2 &= 0;
\end{aligned} \tag{6.21}$$

где $-J$ – моменты инерции входных звеньев соответствующих цепей, m – масса выходного звена,

$\frac{\partial x}{\partial \varphi_i}$; $\frac{\partial y}{\partial \varphi_i}$ – переменные коэффициенты,

M_1^*, M_2^* – моменты в дополнительных приводах, Н·м

Переменные коэффициенты можно определить следующим образом:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial F_i^*}{\partial \varphi_i} \bigg/ \frac{\partial F_i^*}{\partial x}; \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial F_i^*}{\partial \varphi_i} \bigg/ \frac{\partial F_i^*}{\partial y}.$$

Используя принцип возможных перемещений (перемещения на расстояния δx , δy) соответственно имеем уравнения движения:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} \delta x + M_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \delta x + M_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \delta x - J_1 \ddot{\varphi}_1 - J_2 \ddot{\varphi}_2 &= 0 \\
m\ddot{y} \delta y + M_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \delta y + M_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \delta y - J_1 \ddot{\varphi}_1 - J_2 \ddot{\varphi}_2 &= 0
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Переменные коэффициенты $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{\partial F_i^*}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial F_i^*}{\partial \varphi_i}$; $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = \frac{\partial F_i^*}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial F_i^*}{\partial \varphi_i}$ определяются из

дифференцирования уравнения связей (6.15):

$$\frac{\partial F_1^*}{\partial \varphi_1} = -2L_1 L_2 \sin \varphi_1; \quad \frac{\partial F_1^*}{\partial \varphi_2} = 0; \quad \frac{\partial F_2^*}{\partial \varphi_2} = -2L_1 L_2 \sin \varphi_2; \quad \frac{\partial F_2^*}{\partial \varphi_1} = 0; \quad \frac{\partial F_1^*}{\partial x} = 2x - 2x_d;$$

$$\frac{\partial F_1^*}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F_2^*}{\partial x} = 2x - 2x_c; \quad \frac{\partial F_2^*}{\partial y} = 2y.$$

Моменты в дополнительных приводах могут быть найдены подстановкой ускорений \ddot{x} , \ddot{y} из уравнений (6.18) в уравнения движения (6.21).

В рассматриваемом примере при приближении к особому положению при $t=0,04$ с происходит резкое увеличение момента в основном приводе, а при $t=0,06$ с происходит резкое уменьшение момента до допустимой величины. На этом ин-

тервале времени происходит отключение основного привода и включение дополнительного. Значения моментов в дополнительном приводе показаны на рис 6.18.

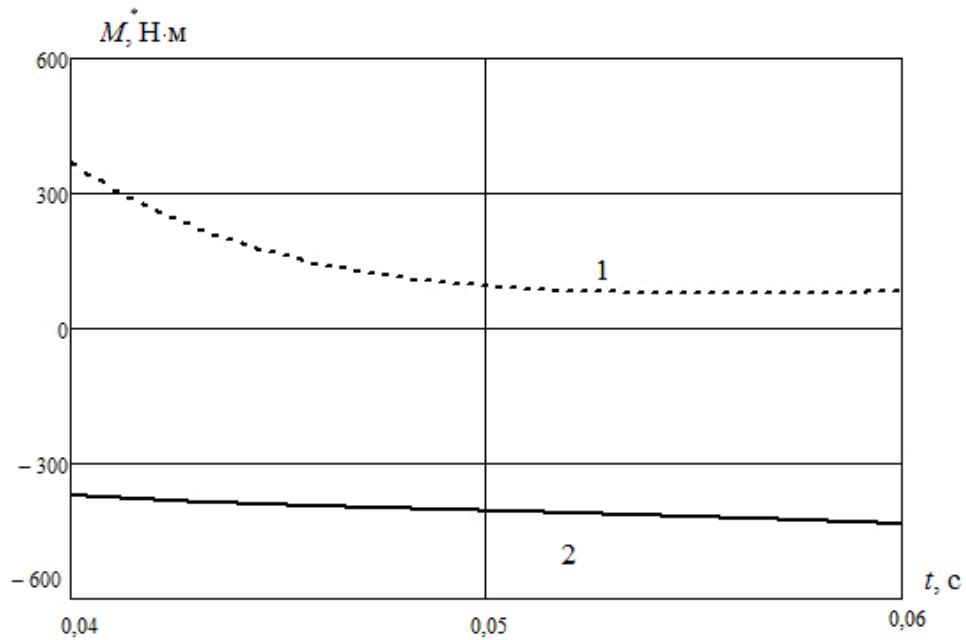


Рис. 6.18 График изменения моментов дополнительного привода

$$1 - M_1^*, 2 - M_2^*$$

Таким образом, показано, что при приближении к особому положению механизма должно происходить отключение двух основных приводов и включение двух дополнительных. После выхода из особого положения происходит выключение дополнительных приводов и включение основных. Таким образом, дополнительные приводы позволяют избежать перегрузок двигателей и избежать потерю управляемости.

Выводы по главе 6

1. Предложен алгоритм управления манипуляционными механизмами параллельной структуры с тремя степенями свободы. Этот алгоритм основан на минимизации ошибки по положению, скорости, ускорению.

2. Показано, что одним из важных критериев является абсолютная величина ошибки положения выходного звена

3. Без учета обратных связей происходит нарастание ошибки по положению. Поэтому необходимо построение управления движением механизма с введением обратных связей по положению и скорости. Отклонения значений обобщенных координат, зависят от начальных возмущений и обуславливают высокую погрешность отслеживания назначенной траектории.

4. Выбор коэффициентов обратной связи основан на решении дифференциального уравнения динамической ошибки и параметров переходного процесса, что обеспечивает устойчивость и минимизации ошибки по положению, скорости и ускорения

5. Закон управления, построенный на основе решения обратной задачи динамики и учитывающий обратные связи по положению и скорости, отвечает требованиям оптимального управления движения механизма по заданной траектории. Закон ошибки описывается колебательным звеном. На основе численного моделирования движения механизма параллельной структуры по заданной траектории проверена эффективность разработанного алгоритма оптимального управления для механизмов различных классов.

6. Этот алгоритм апробирован также на плоском механизме параллельной структуры при пересечении особых положений. В механизмах параллельной структуры, имеющих в рабочей зоне особые положения, необходимо предусматривать дополнительные приводы для вывода из особых положений. Момент включения дополнительного двигателя не оказывает существенного влияния на характер поведения динамической ошибки.

7. Исследовано влияние точности при отклонении механизма от модели, а также влияние собственной частоты уравнения ошибки от частоты закона движения. При решении задачи управления можно пренебречь массой входных звеньев (при условии, что масса входных звеньев составляет не более 30% от массы выходных). Ошибка положения в этом случае не превышает 5% от точности управления модели.

ГЛАВА 7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА РАБОТОСПОСОБНОСТИ РАЗРАБОТАННЫХ МАНИПУЛЯТОРОВ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИХ ВНЕДРЕНИЯ.

В данной главе рассмотрены экспериментальные модели манипуляционных механизмов, их конструкции, а также исследованы свойства. Представлены возможные их применения в различных отраслях промышленности.

7.1. Конструирование экспериментальных образцов

При создании физической модели за прототип взят механизм с тремя кинематическими цепями и с тремя приводами. Промежуточные звенья соединены вращательными парами, а с выходным звеном соединены сферическими парами.

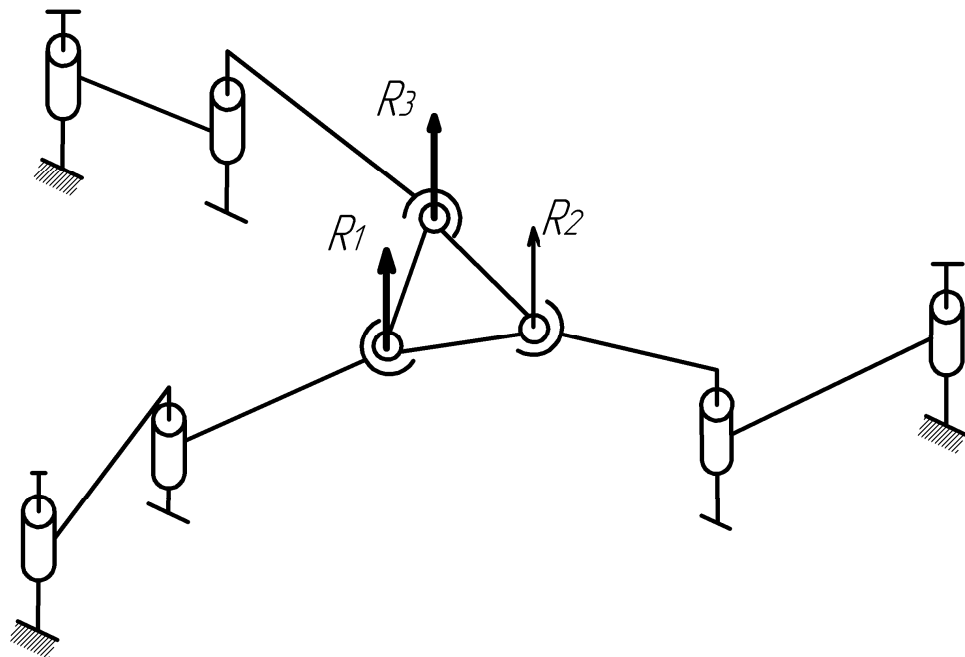


Рис. 7.1 Кинематическая схема плоского механизма

Модель выполнена из неподвижной рамной конструкции, подвижной платформы и трех кинематических цепей (рис.7.2). Для управления перемещением подвижной платформы в плоскости установлены три вращательных двигателя на

неподвижном основании, что уменьшает массу и размер подвижных звеньев [129, 132, 133].

В представленной модели выходное звено представляет собой цилиндрическую пластину из алюминиевого сплава диаметром 55 мм и толщиной 4 мм, выполненной из алюминиевого сплава. Конструкция выходного звена манипуляционного механизма представлена на (рис. 7.3). Соединенные с ним промежуточные звенья выполнены из алюминиевого прутка круглого сечения диаметром 8 мм и длиной 130 мм. Вертикально расположенные направляющие стержни сделаны из стального прутка квадратного сечения 8x8 и длиной 500 мм и расположены на расстоянии 350 мм друг от друга.



Рис. 7.2 Общий вид модели плоского механизма

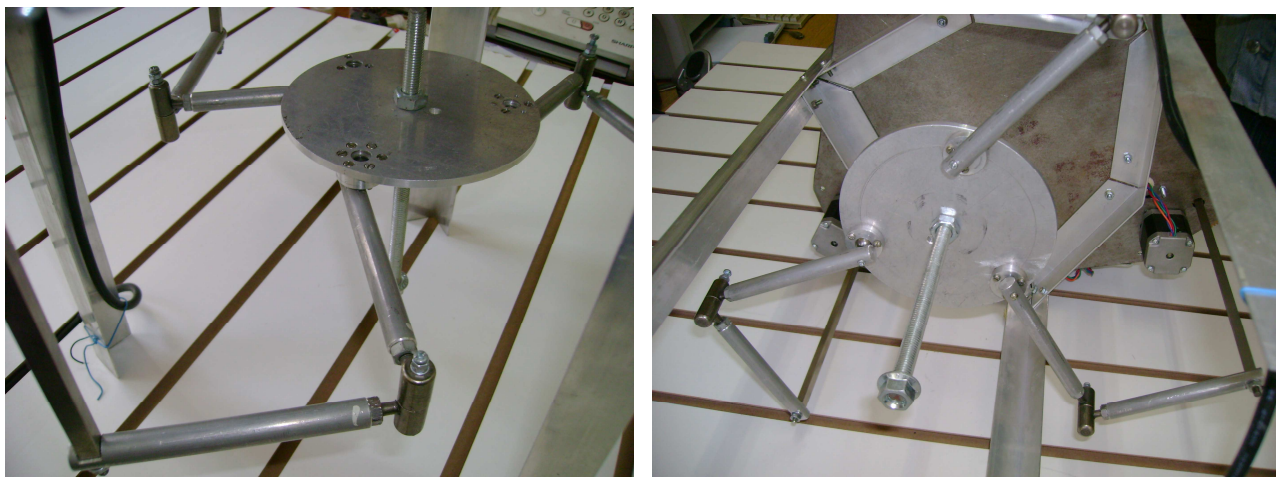


Рис. 7.3 Конструкция выходного звена

Выходное звено соединено тремя промежуточными звеньями посредством вращательных кинематических пар. Выходной вал каждого из трех двигателей

вращательного перемещения сопряжен посредством зубчатой передачи с соответствующей штангой (рис.7.4). Цилиндрическая передача состоит из двух зубчатых колес с модулем $m=1$ мм, числом зубьев $z_1=15$, $z_2=67$.

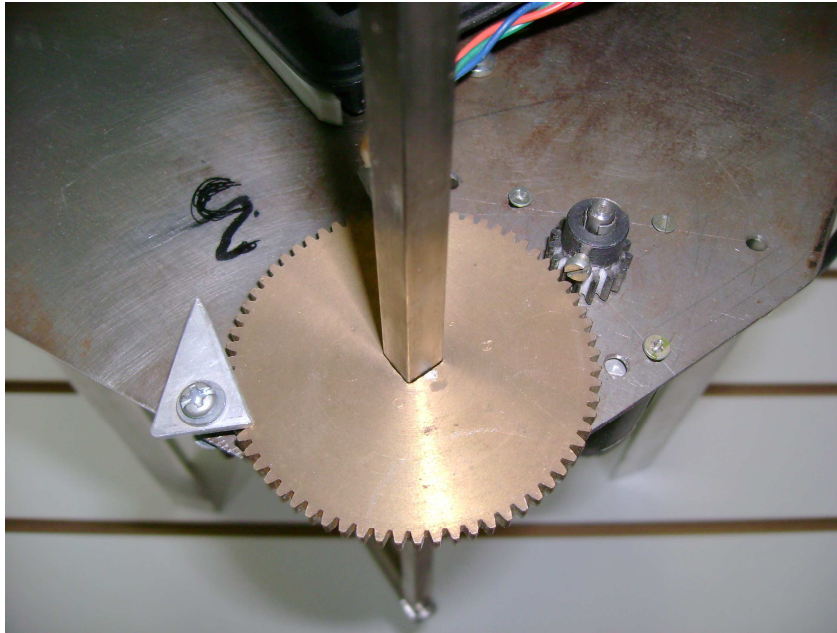


Рис.7.4 Зубчатая передача

Выходное звено соединено с промежуточными звеньями с помощью сферических пар (рис. 7.5).

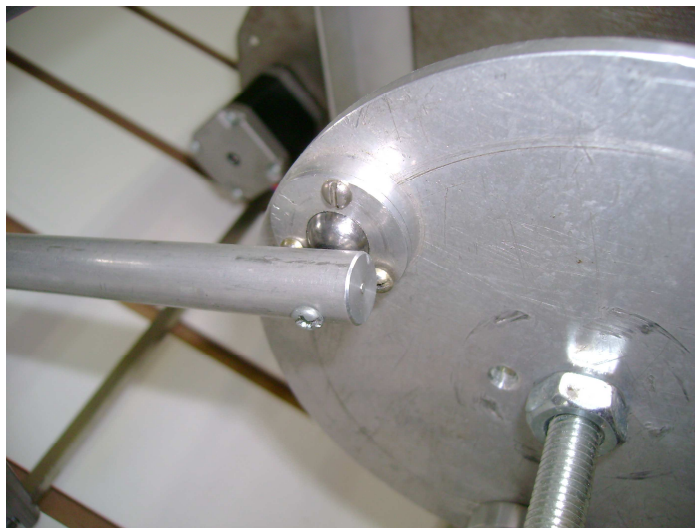


Рис. 7.5. Сферическая пара, соединяющая выходное и промежуточные звенья

Промежуточные звенья соединены с выходным звеном сферическими шарнирными парами. Конструкция таких пар представлена на рис.7.6. Чертеж выходной платформы показан на рис.7.7. Общий вид промежуточного звена изображен на рис. 7.8.

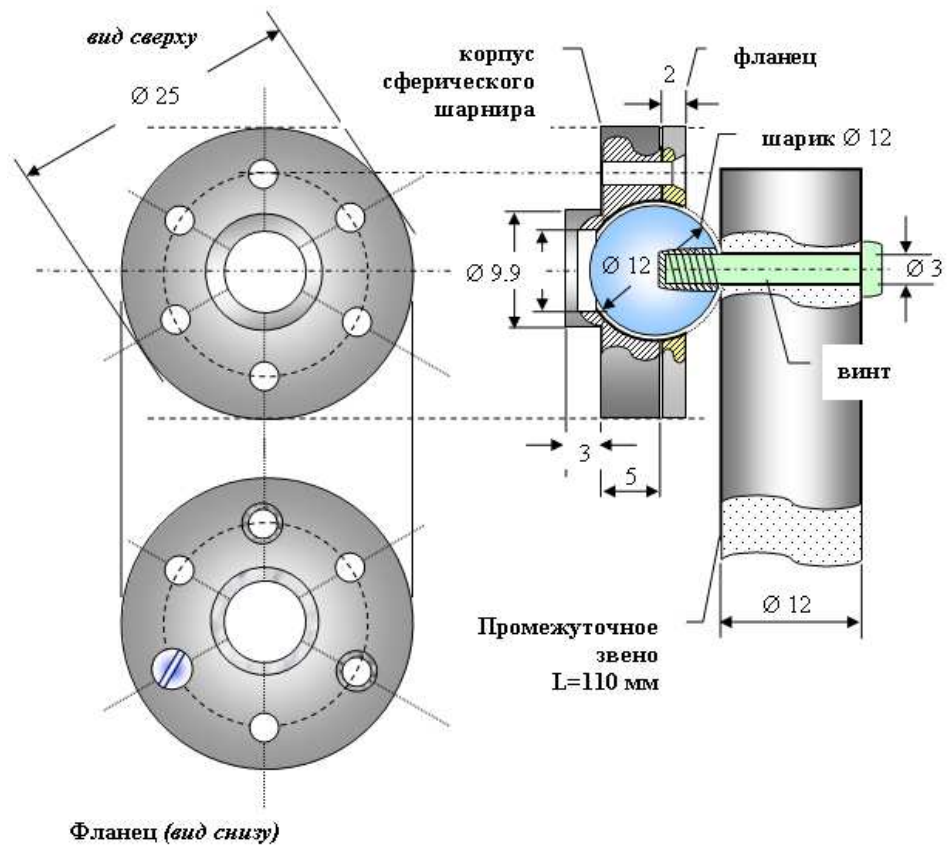


Рис.7.6. Корпус сферического шарнира

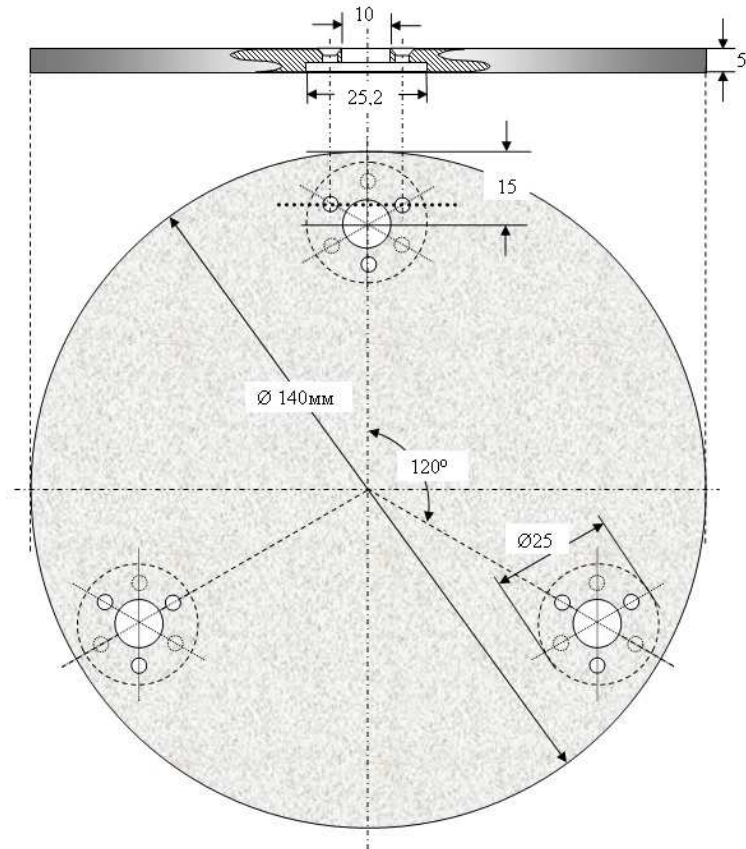


Рис.7.7. Платформа выходного звена

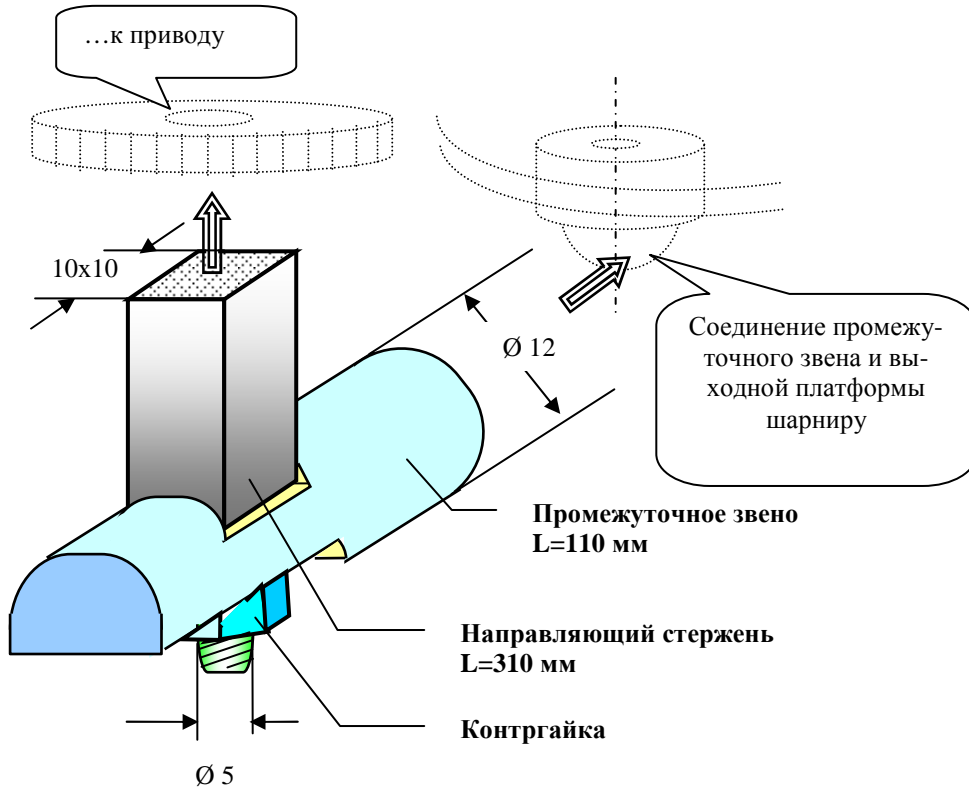


Рис.7.8 Общий вид промежуточного звена

При создании физических моделей поступательно-направляющих механизмов прототипами являлись механизм с пятью вращательными парами 3RRRRR (рис.7.9 а) и механизм с параллелограммами в каждой цепи 3PPaPa (рис. 7.9.б).

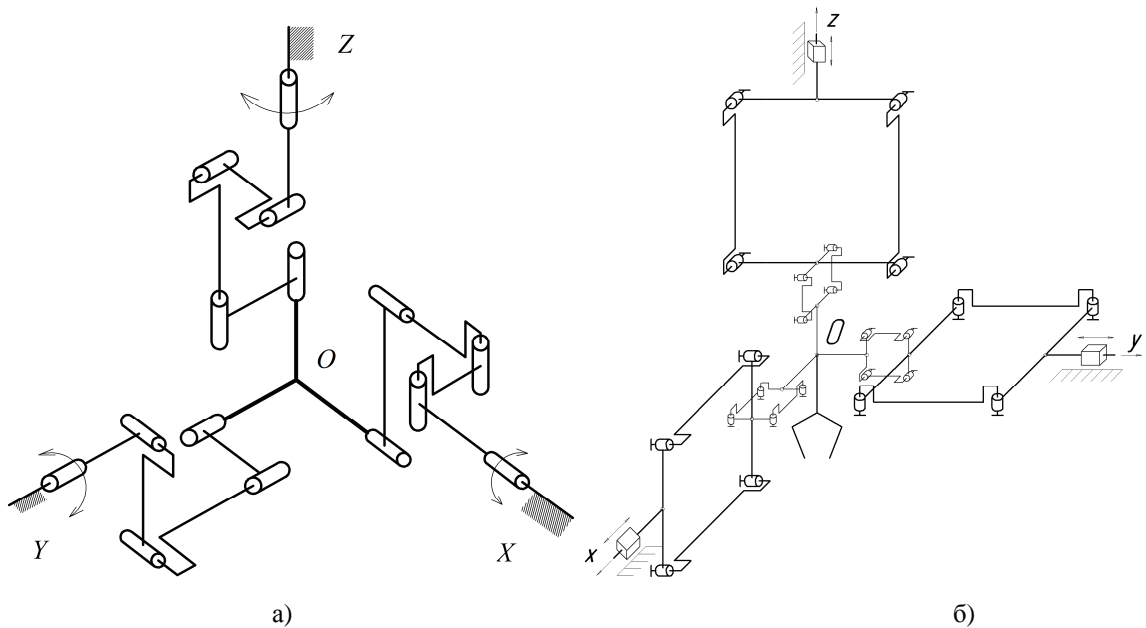


Рис. 7.9 Кинематическая схема поступательно-направляющего механизма
а – 3RRRRR, б – PPaPa

Звенья механизма изготовлены из алюминиевого стрежня диаметром 6 мм и следующими длинами: входное звено $l=0,265$ м, промежуточные звенья $l_1=0,105$ м. (рис.7.10) [72].

Массы звеньев механизма составляют: масса входного звена $m_1=0,050$ кг, массы промежуточных звеньев $m=0,025$ кг. Общая масса металлоконструкции механизма без масс опорной стойки, приводных двигателей и деталей зубчатых передач составила примерно $m_M = 0,4$ кг.

В качестве приводов в физической модели используются шаговые двигатели PL42H48-2.4-4 с номинальным паспортным моментом удержания $0,54$ Н·м и угловым шагом $1,8$ градуса, соединенные с входными звеньями цилиндрической передачи, состоящей из колес с модулем $m=1$ мм, числом зубьев $z_1=15$, $z_2=67$. Выходное звено выполнено в виде платформы.



Рис. 7.10 Физическая демонстрационная модель манипулятора

Конструкция поступательно-направляющего механизма 3RPaPa с шарнирными параллелограммами представлена на рис. 7.11.

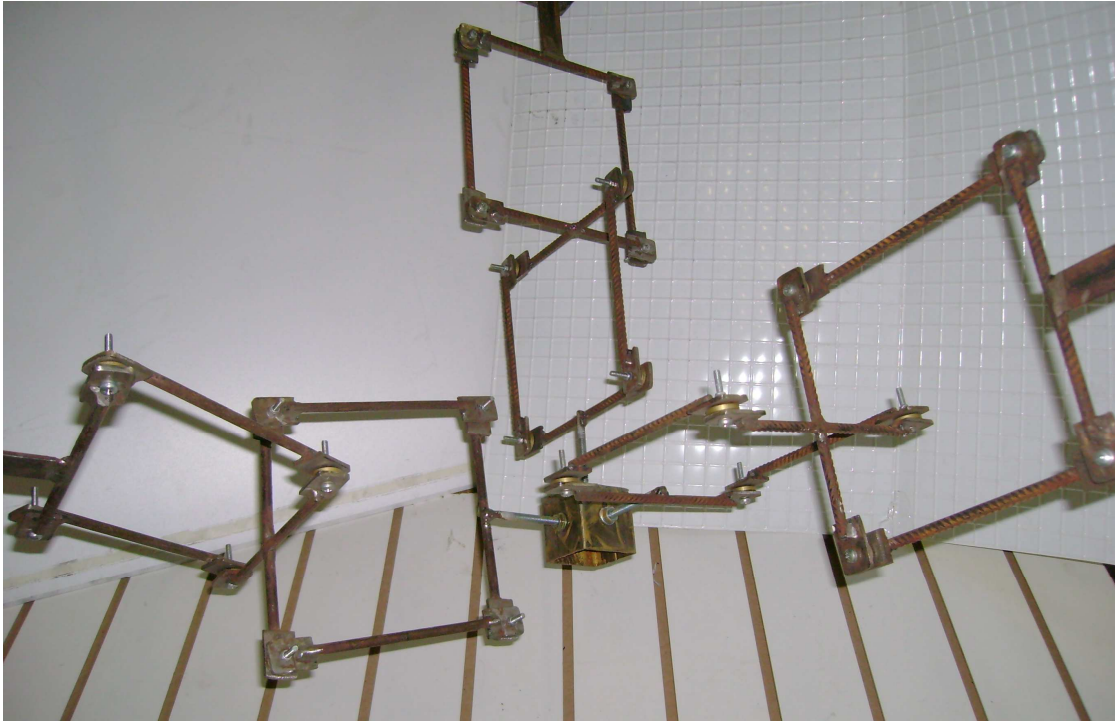


Рис. 7.11 Поступательно-направляющий механизм

Шарнирное соединение звеньев параллелограмма показано на рис. 7.12. Конструктивное решение кинематических цепей, звеньев параллелограмма, соединения входного звена показаны на рис. 7.13, 7.14, 7.15.

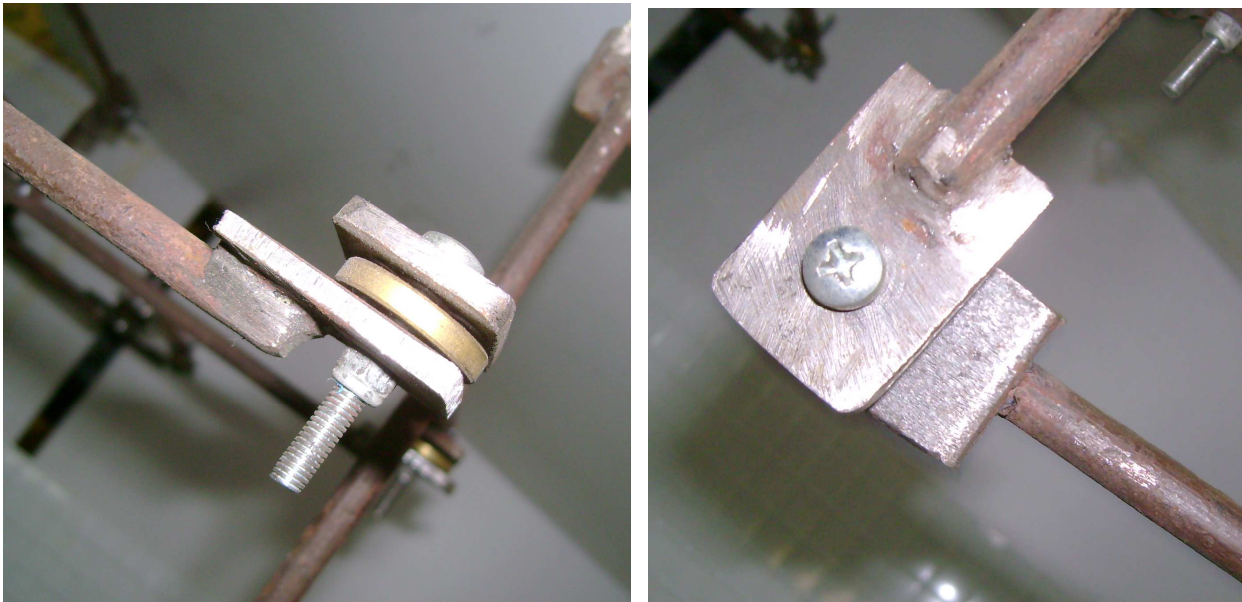


Рис.7.12 Шарнирное соединение звеньев параллелограмма

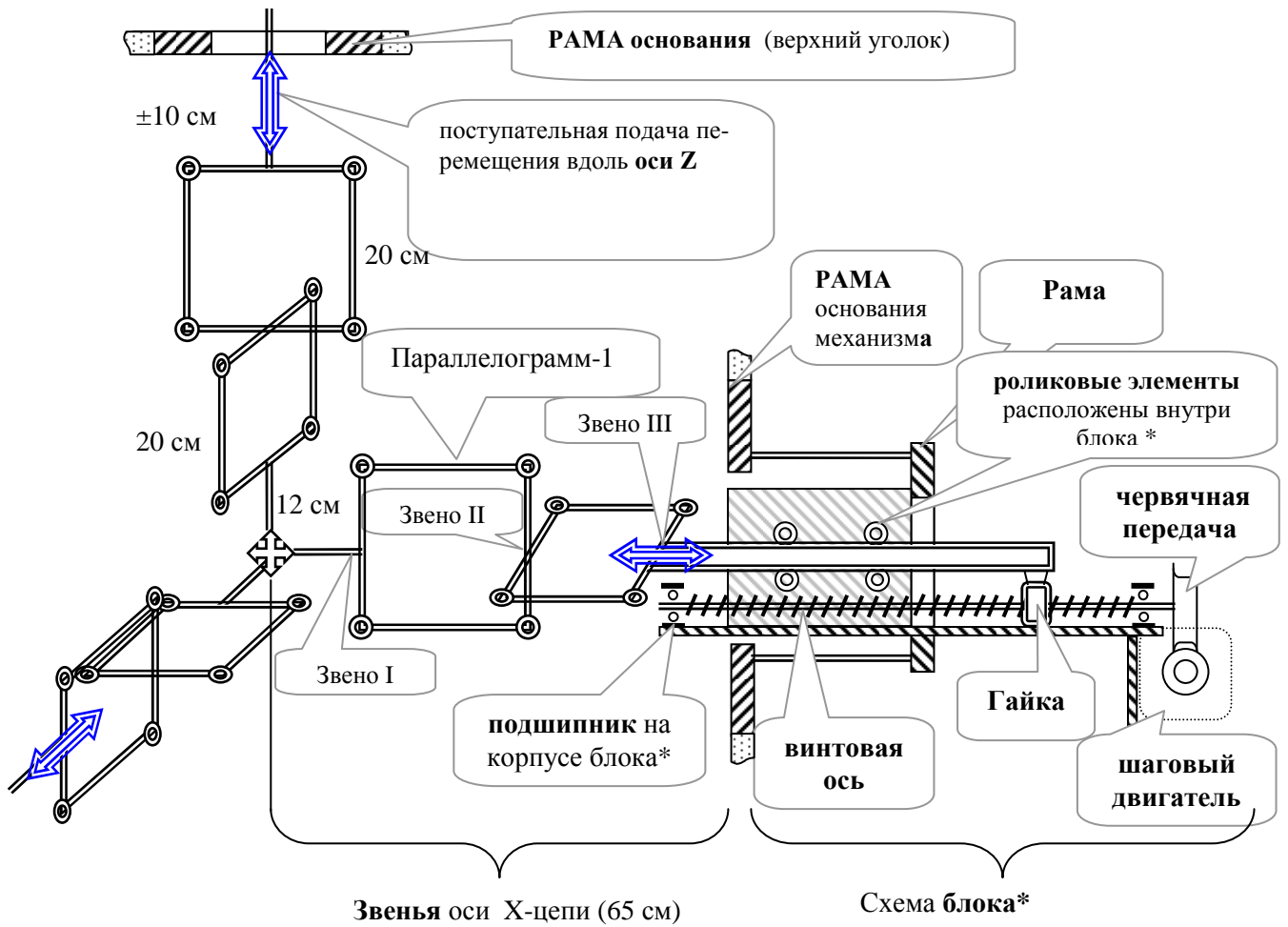


Рис.7.13 Конструкция кинематической цепи

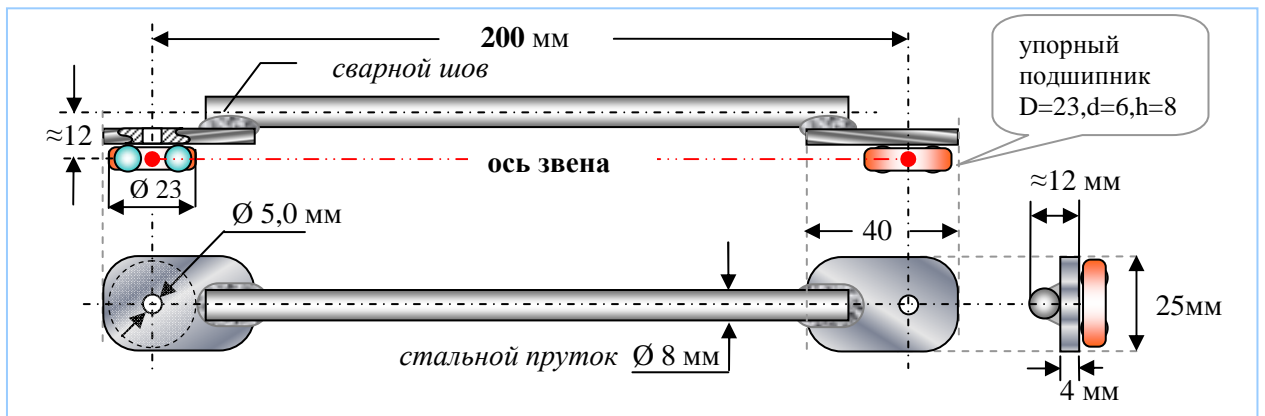


Рис.7.14 Промежуточное звено параллелограмма

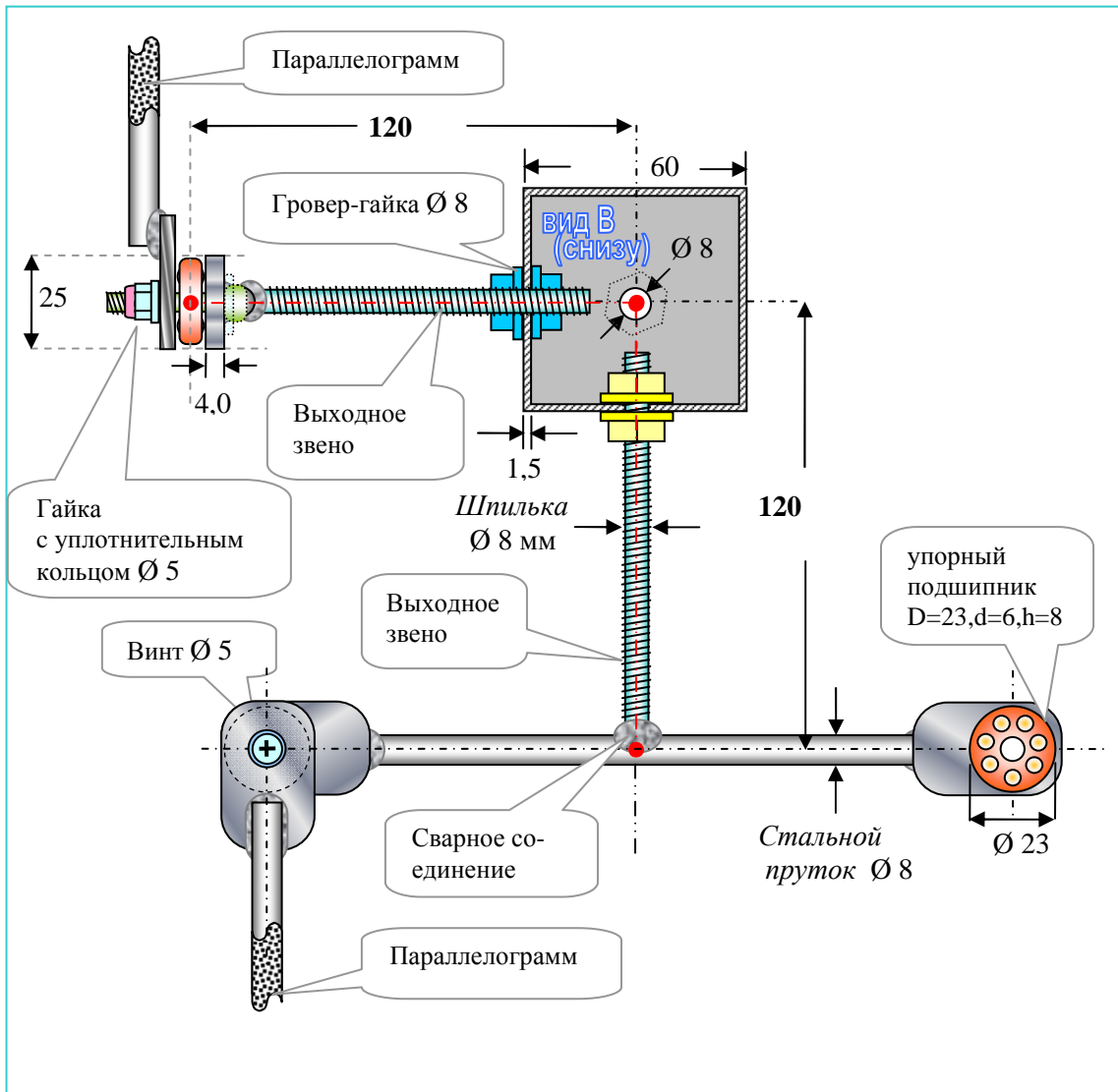


Рис.7.15 Соединение выходного звена с параллелограммами

При создании физической модели сферического механизма прототипом является сферический механизм с тремя степенями свободы, с тремя приводами 2RRRU, RU (рис.7.16). Первая и вторая кинематические цепи содержат по два звена, соединенных вращательными парами, а с выходным звеном соединены универсальным шарниром. Третья кинематическая цепь соединена с приводом универсальным шарниром.

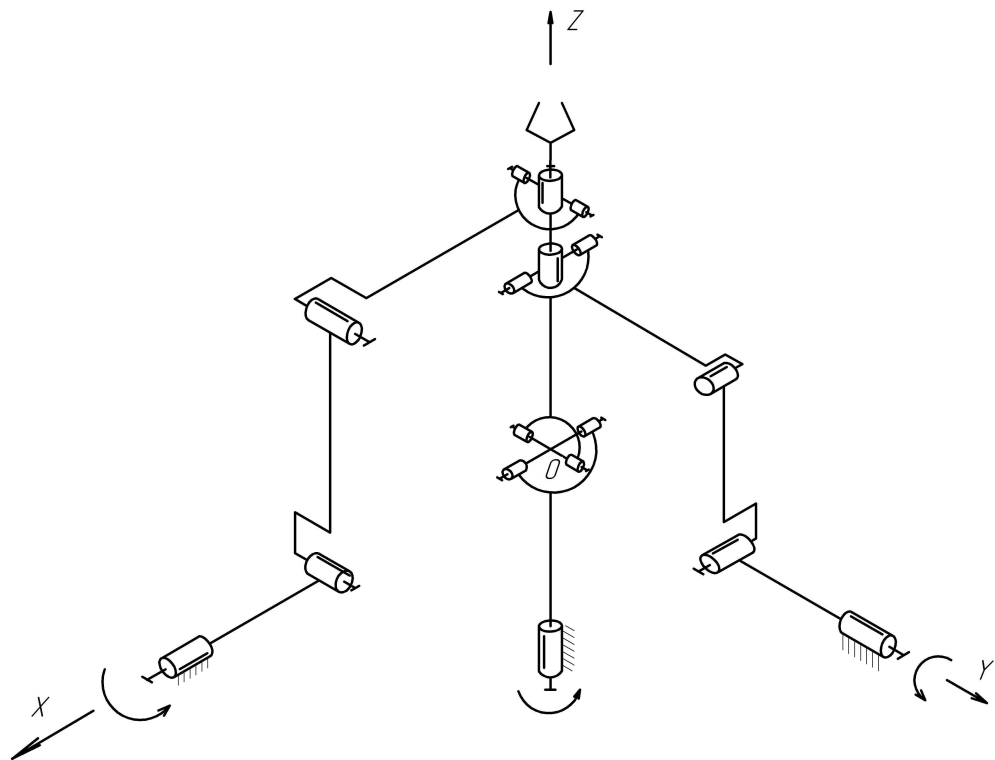


Рис.7.16. Кинематическая схема сферического механизма

В представленном прототипе входные звенья первой и второй кинематической цепей, соединены с валом двигателя, и выполнены из алюминиевого стержня диаметром 6 мм. Два промежуточных звена первой и второй цепей выполнены из стержня диаметром 4 мм (шпилька) длиной 50-70 мм, что позволяет подобрать нужную длину (рис. 7.17).

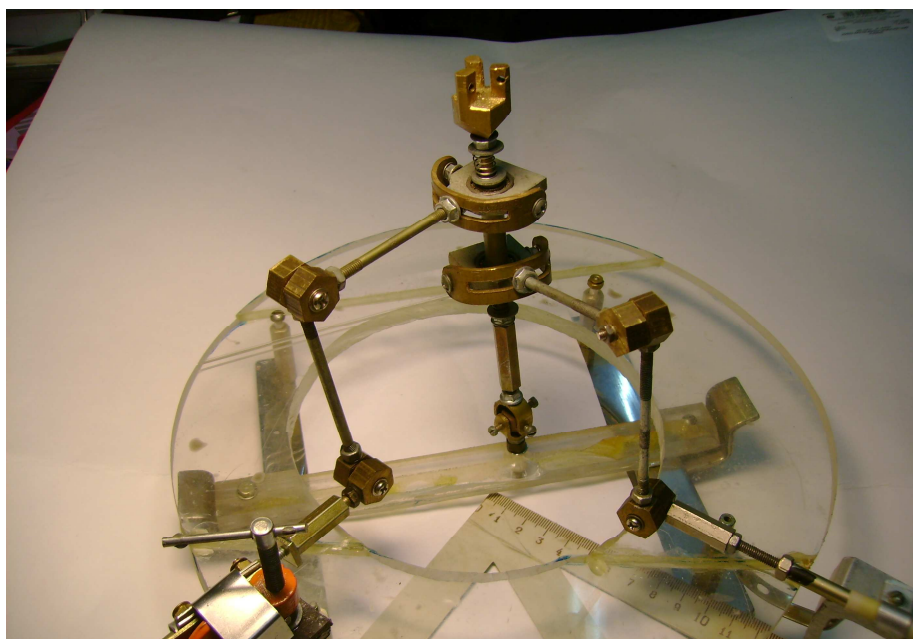


Рис.7.17. Конструкция сферического механизма

Промежуточные звенья соединены между собой подшипниковыми узлами, выполненными в виде шестигранников (рис.7.18). В этом узле использован однорядный упорный подшипник (внутренний диаметр 3 мм, наружный диаметр 10 мм, толщина 4 мм) (рис.7.19). Корпус узла выполнен из латунных шестигранников.

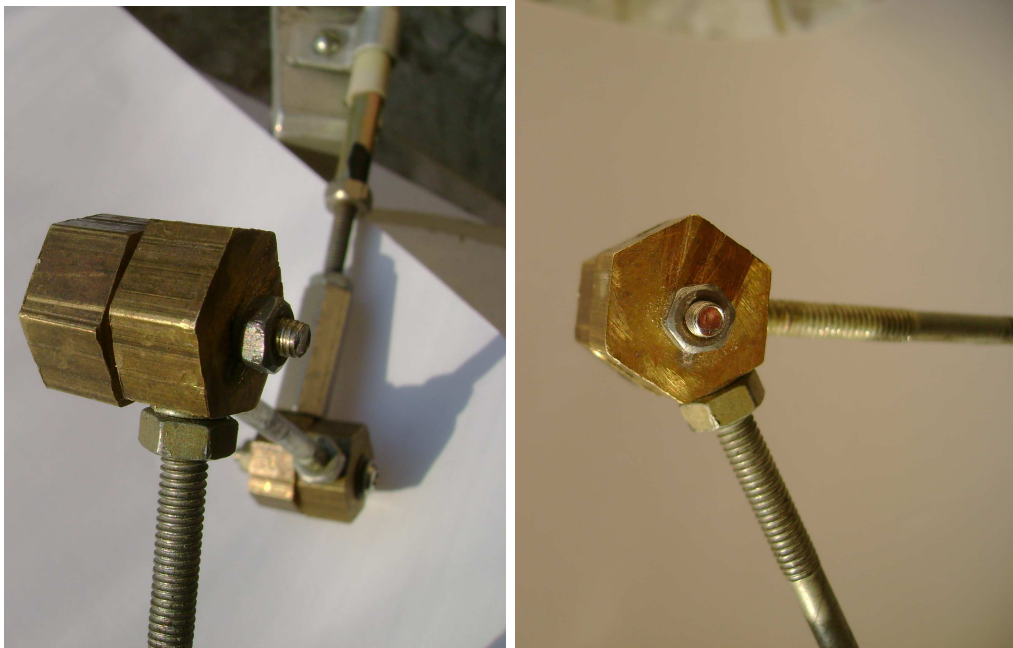


Рис. 7.18. Промежуточные вращательные пары

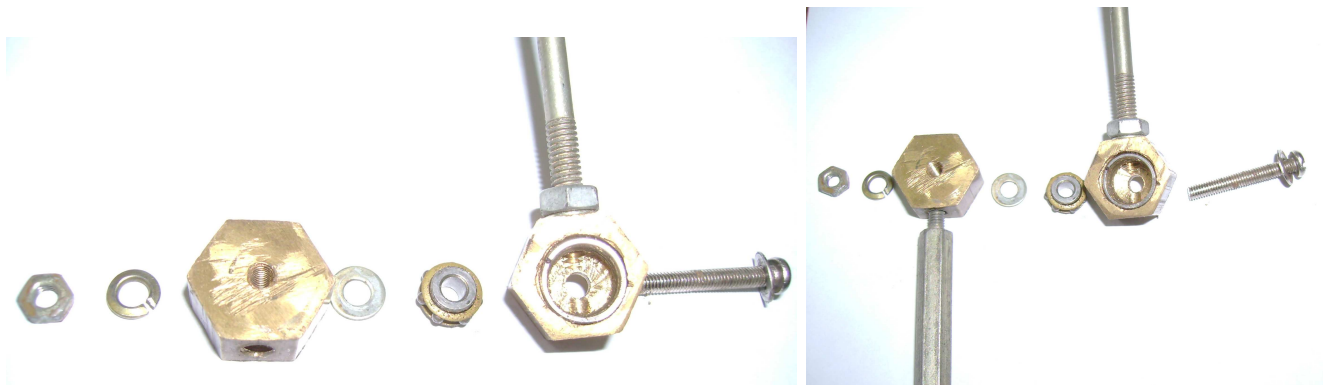


Рис. 7.19. Конструкция подшипникового узла

В каждом шестиграннике также имеется боковая резьба для соединения с элементами звеньев диаметром 4 мм, которые при фиксации затягиваются гровер-гайкой диаметром 4 мм. На оси третьей кинематической цепи расположены перпендикулярно относительно оси Z два универсальных шарнира (рис.7.20).

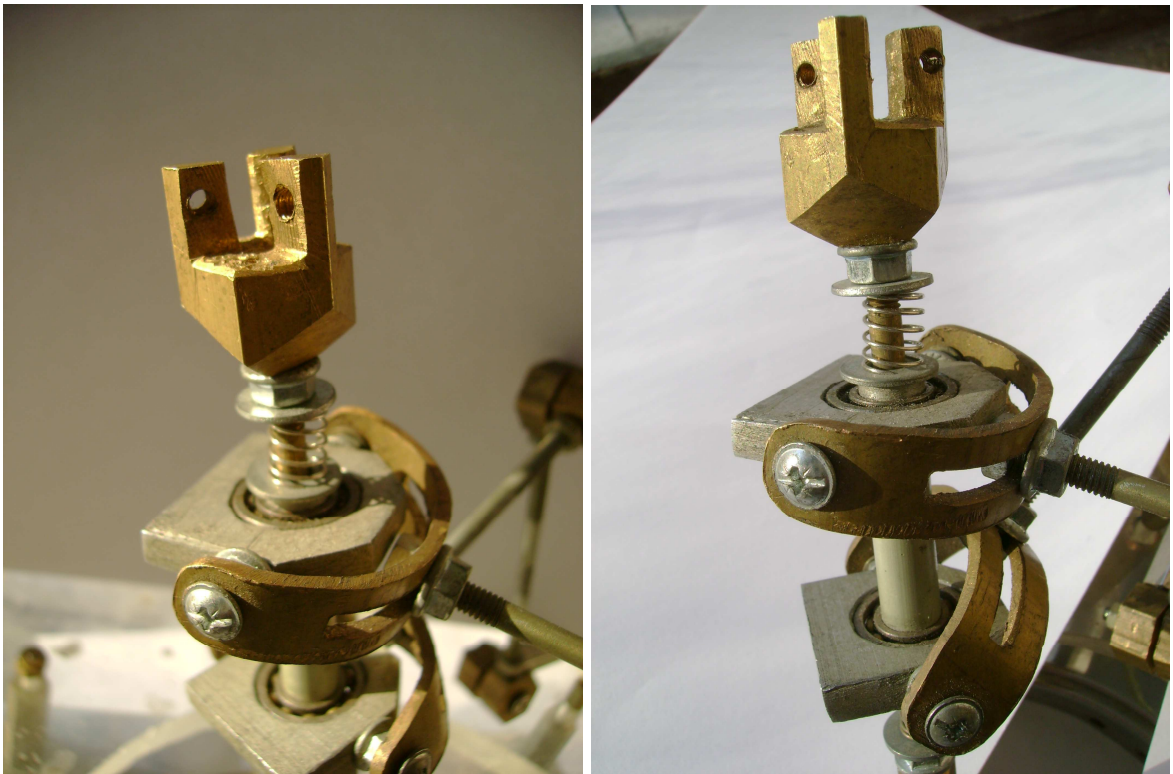


Рис. 7.20. Выходное звено

В универсальном шарнире использован шариковый однорядный подшипник внутренним диаметром 8 мм, наружным диаметром 16 мм, толщиной 5 мм. Входное звено третьей кинематической цепи соединено с приводом с помощью универсального шарнира (рис. 7.21). Он представляет собой куб с длиной 9 мм со сквозной резьбой диаметром 3 мм и две полукруглые скобы наружным диаметром 15 мм с боковыми отверстиями диаметрами 3 мм под полые винты и отверстием с резьбой диаметром 4 мм для возможности крепления с валом и фиксацией гровергайкой.

Чертеж первой и второй кинематических цепей представлен на рис. 7.22, чертеж третьей кинематической цепи показан на рис. 7.23.

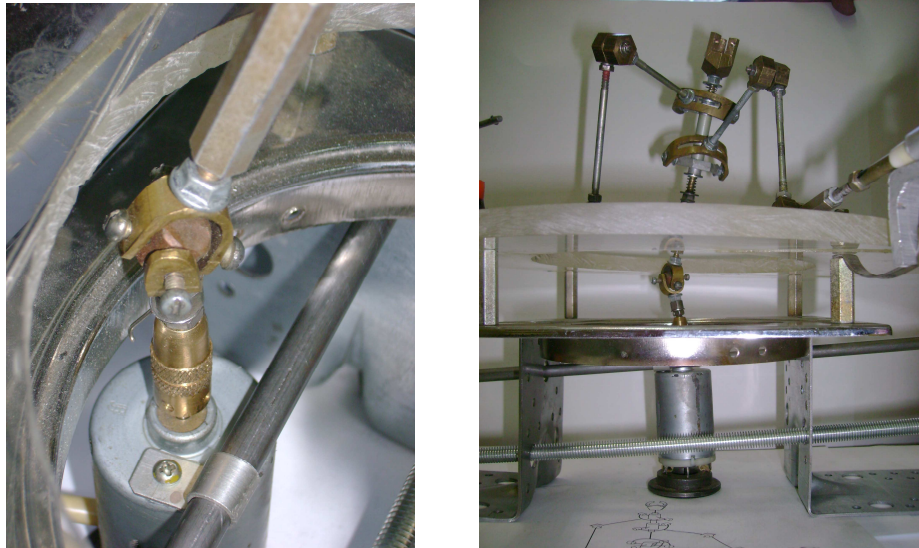


Рис. 7.21 Привод третьей кинематической цепи

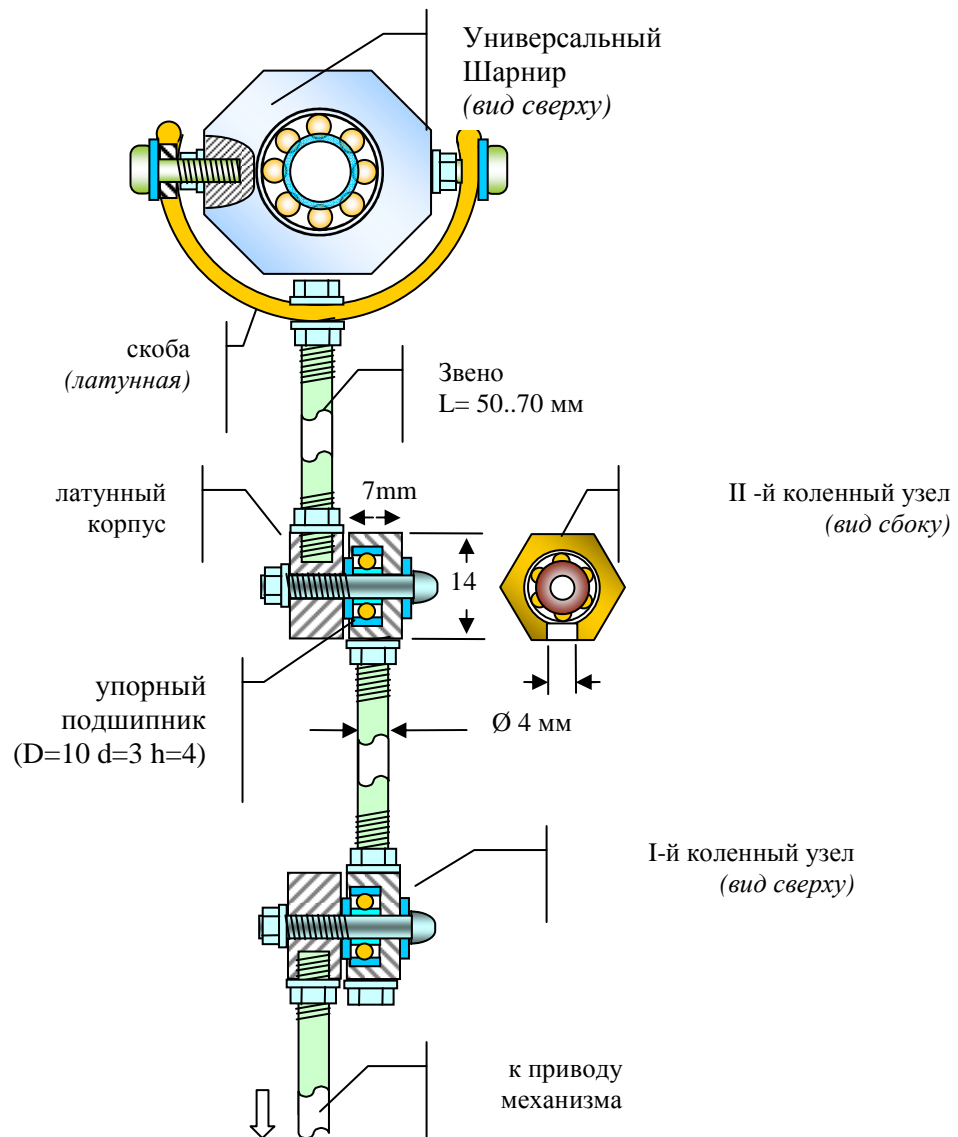


Рис. 7.22 Чертеж первой и второй кинематических цепей

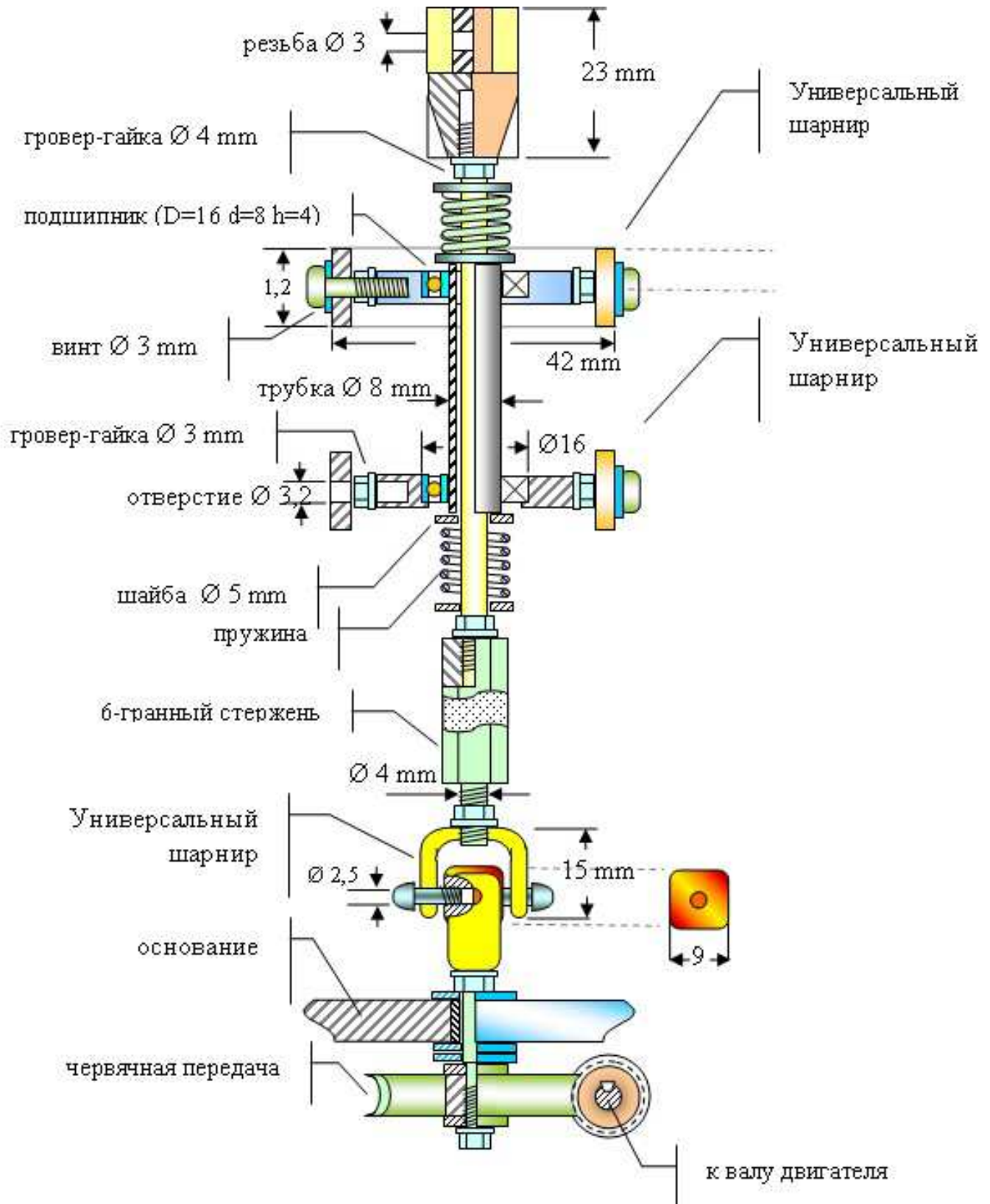


Рис. 7.23 Чертеж третьей кинематической цепи

7.2. Экспериментальное исследование механизмов

При исследовании механизмов были определены некоторые свойства механизмов. Так, для плоского механизма были определены рабочая зона, углы поворота платформы, особые положения, повторяемость. В ходе проведенных экспериментов были получены следующие технические характеристики манипулятора:

- Повторяемость, мм.....	0,5
- Максимальное расстояние от центра платформы, мм	280
- Максимальный угол поворота подвижной платформы вокруг оси вращения, град	210
- Габаритные размеры макета вместе с блоком управления, мм:	
- длина	420
- ширина	420
- высота	800
- Общая масса, кг	10,2
- Тип электродвигателей:	
три шаговых электродвигателя PL42H48-2.4-4	
- Число одновременно управляемых координат.....	3
- Напряжение, В.....	220

Особые положения механизма представлены на рис.7.24.

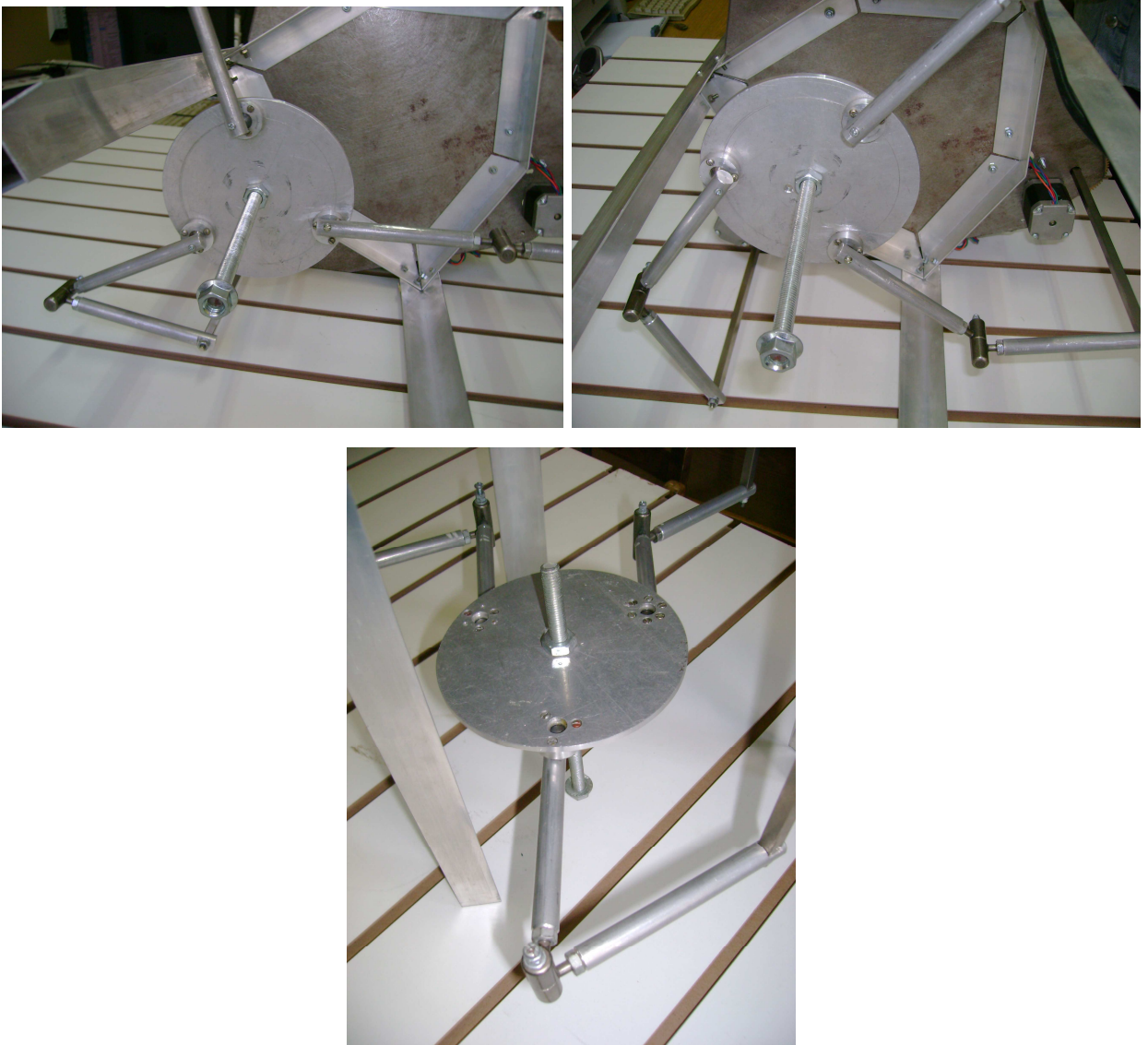


Рис. 7.24 Особые положение

При определении повторяемости, которая в робототехнике является одной из наиболее важных характеристик, была применена следующая методика. Были использованы индикаторы перемещения механического типа с ценой деления 0,01 мм. Затем выходное звено выводится в другую позицию и приводам дается команда возвращения в исходное положение. Отклонение между первоначальным положением и тем, что достигнуто после указанных движений регистрируется. Этот эксперимент проводится многократно. На основании указанного подхода можно определить максимальное отклонение от заданного положения и среднюю ошибку. Для исследованного робота параллельной структуры повторяемость составила около 0,5 мм.

При определении точности движения по траектории использовалась следующий подход. Траектория была задана в виде прямой линии, вдоль которой должно двигаться выходное звено, сохраняя постоянную ориентацию. На выходном звене перпендикулярно прямой линии устанавливался индикатор перемещения, выполненный таким образом, чтобы он не сбрасывал максимальное отклонение. Таким образом, можно определить максимум отклонения от траектории. Можно воспользоваться также индикатором с цифровой индикацией, тогда можно вывести график изменения ошибки по траектории. Для данного робота максимальное отклонение составило 0,7 мм. Отметим, что все натурные образцы роботов параллельной структуры были выполнены в лаборатории МГУДТ с соблюдением невысоких требований по точности изготовления деталей. При усилении требований изготовления деталей точность роботов существенно возрастет.

Для поступательно-направляющих механизмов была определена грузоподъемность, исследована рабочая зона (рис. 7.25, 7.26).



Рис. 7.25. Положения выходного звена в различных положениях рабочей зоны



Рис. 7.26. Оценка грузоподъёмности манипулятора с грузом массой 3 кг

Экспериментальные исследования физической модели показали:

- выходное звено совершает поступательные движения.
- при определении границ рабочего пространства модели манипулятора максимальные значения перемещения вдоль горизонтальных осей составили 170 мм, а максимальное вертикальное перемещение 160 мм.

Для поступательно-направляющего механизма ЗРPaPa были определены размеры рабочей зоны и исследованы особые положения (рис. 7.27). Экспериментальные исследования физической модели показали, что выходное звено совершает поступательные движения. При определении границ рабочего пространства модели манипулятора максимальные значения перемещений центра её грузовой платформы вдоль осей координат составили 700 мм, а максимальное значение перемещения вдоль вертикальной оси 700 мм.



Рис. 7.27 Особые положения механизма

Таким образом, результаты экспериментальных исследований физической модели манипулятора в целом подтверждают работоспособность предложенной конструкции.

7.3. Применения механизмов

Синтезированные механизмы в силу их преимуществ могут иметь широкие возможности применения в текстильной и легкой промышленности [120, 121, 125, 129]. Так, например, в прядильном производстве робот должен не только транспортировать бобины, но и взаимодействовать с технологическим оборудованием, что накладывает ограничения на конструкцию и его габариты. Робот должен быть компактным, легко и быстро перемещаться в рабочей зоне, а для обслуживания нескольких машин иметь возможность перемещения по транспортной линии, т.е. совершать операции погрузки-выгрузки (съема-установки) и транспортировки объектов. В прядильном производстве это операции упаковки и пакетирования

бобин с нитями и пряжей, смены наработанных тазов с лентой. В зависимости от требований схват может быть выполнен в различных исполнениях.

На пневмомеханических прядильных машинах наполненные бобины находятся сверху машины. Поэтому робот должен перемещаться по транспортным линиям, проложенным под потолком. Например, для транспортировки грузов основание манипуляционного механизма можно установить на рельсовых путях (рис. 7.28).

Предлагаемый плоский механизм с тремя степенями свободы может применяться для обеспечения связи между оборудованием, технологическими комплексами и технологическими переходами, а также для обслуживания автоматизированных складов, что очень важно в гибких производственных системах.

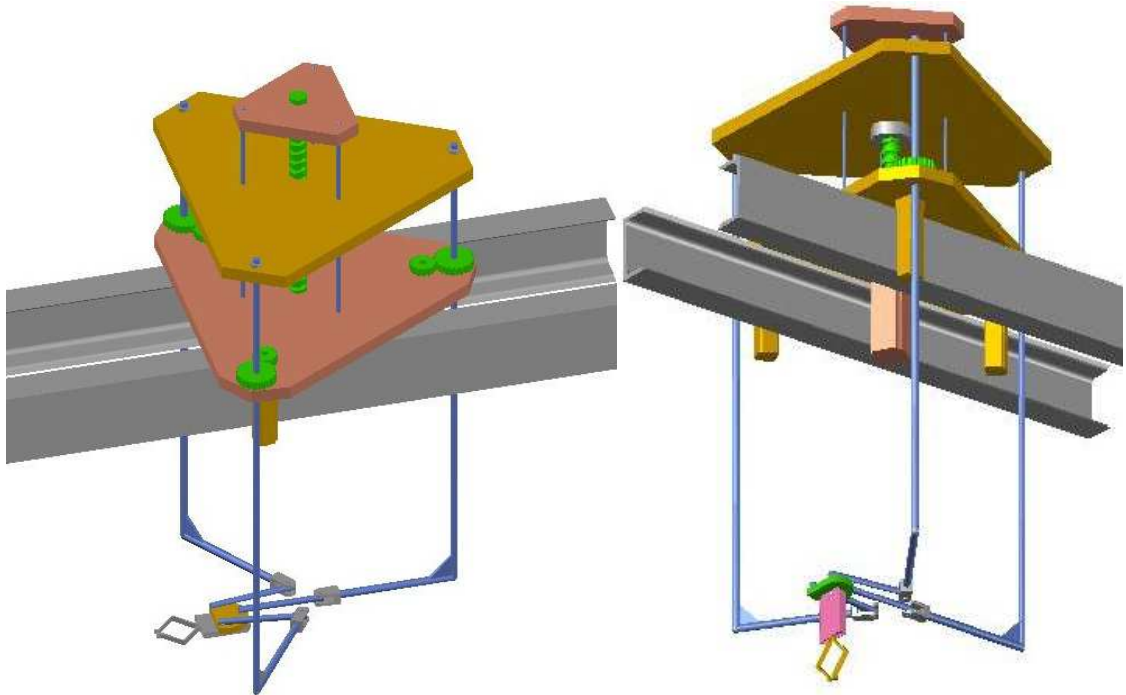


Рис. 7.28 Плоский механизм в различных исполнениях

Также одним из возможных применений плоского механизма с тремя степенями свободы могут быть раскройные операции в швейном производстве (рис. 7.29). Учитывая возможность поворота режущего инструмента вокруг оси, можно осуществлять раскрой по криволинейной траектории. Режущим инструментом может быть ножи, резак, фрезы

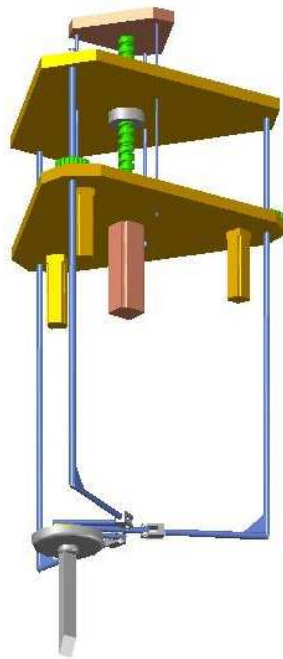


Рис. 7.29 Раскройные операции с применением плоского механизма.

Плоский механизм (рис. 7.30) с двумя степенями свободы может применяться в оборудовании контроля качества текстильных материалов, в установках нанесения текстур и объемных изображений. Объемные изображения могут наноситься по принципу удаления вещества с поверхности лазерным импульсом.

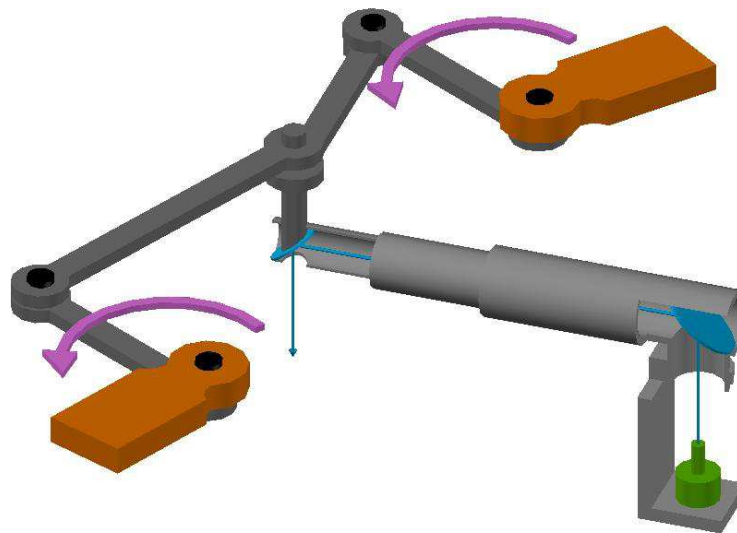


Рис. 7.30 Плоский лазерный механизм для нанесения объемных изображений

Поступательно-направляющие механизмы могут использоваться в качестве устройства для перемещения измерительного щупа, сварочного электрода, для

обработки плоских объектов, а также в иглопробивных машинах для соединения нетканых материалов (рис. 7.31).

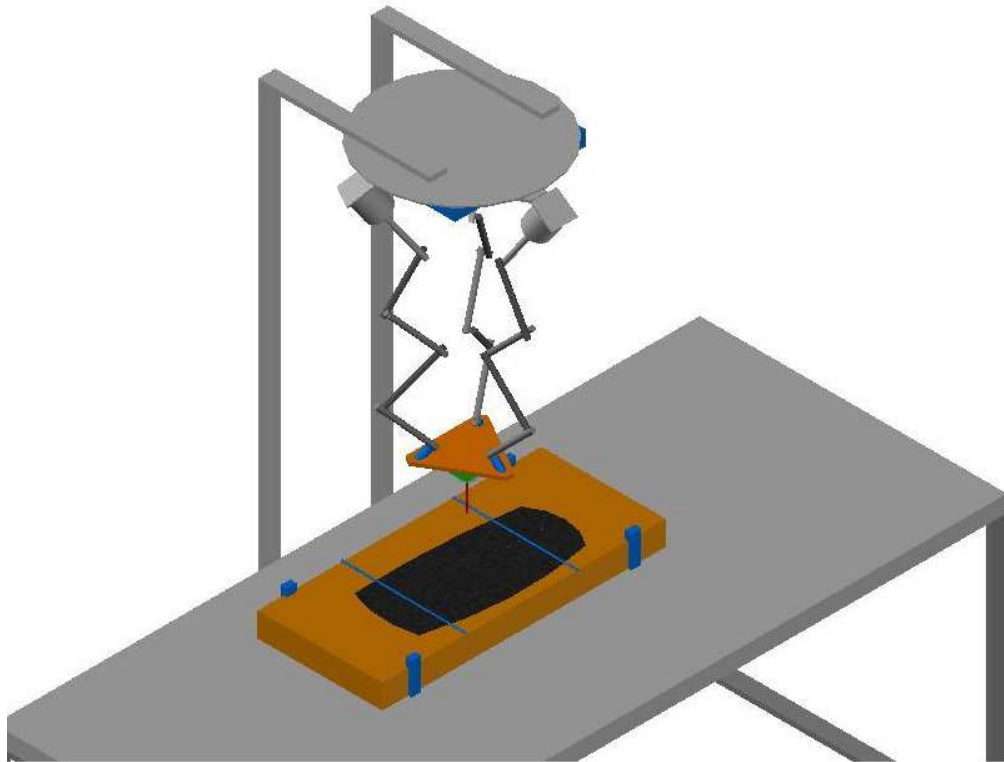


Рис. 7.31 Механизм для обработки плоских объектов.

На предприятиях кожевенно-обувной промышленности одним из применений может быть операция обработки низа обуви, его шершевания, где исполнительный орган перемещается по сложной пространственной траектории (рис.7.32)., для перекладки обувных изделий с транспортера на рабочий стол оператора в робототехническом комплексе для литья низа обуви, а также ряде вспомогательных операций.

Учитывая, что приводы расположены на внешней поверхности по отношению к конструкции механизма и выходного звена, т.е. отделены от агрессивной и токсичной среды, возможно применение в красильно-отделочном производстве и производстве химических волокон.

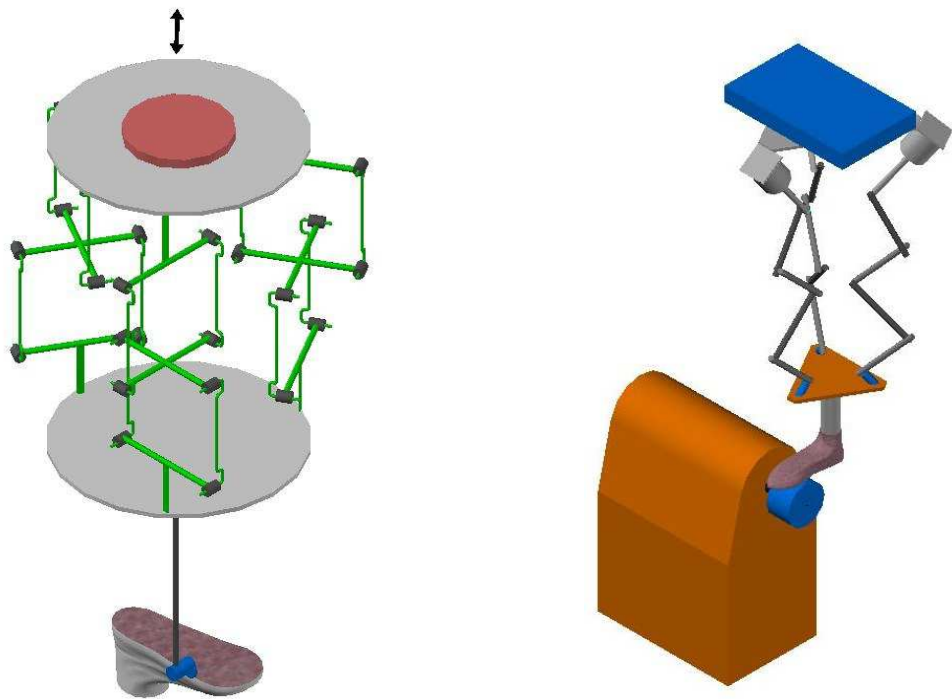


Рис. 7.32 Обработка низа обуви

В шелкографии необходимо использовать два манипуляционных механизма (рис. 7.33). Один поступательно-направляющий механизм обеспечивает продавливания краски на запечатываемый материал, другой обеспечивает перемещение стола с материалом. Это представляет собой механизмы относительного манипулирования.

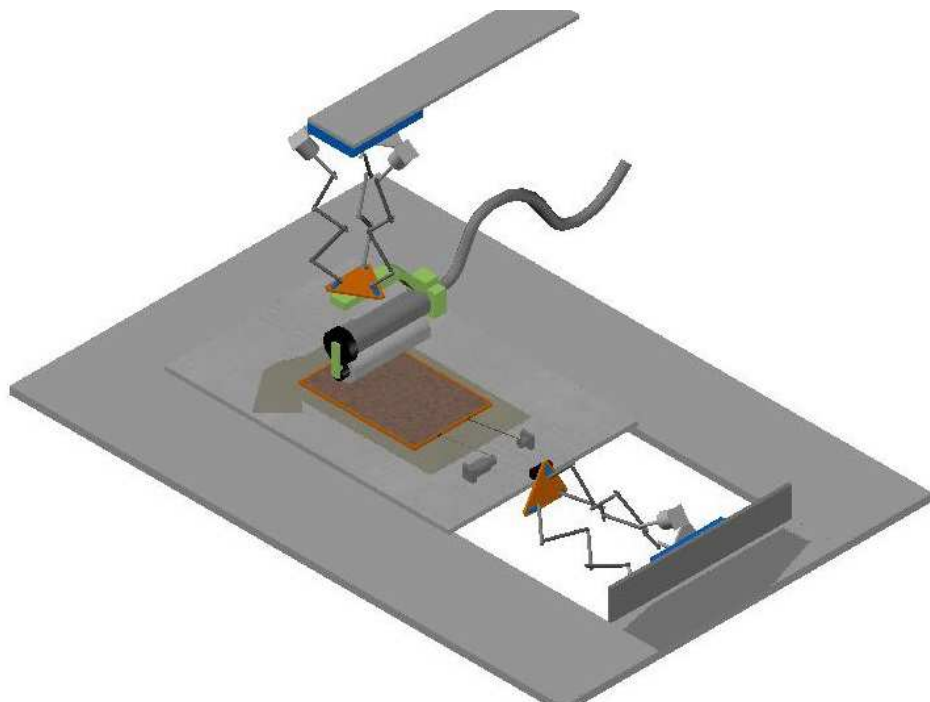
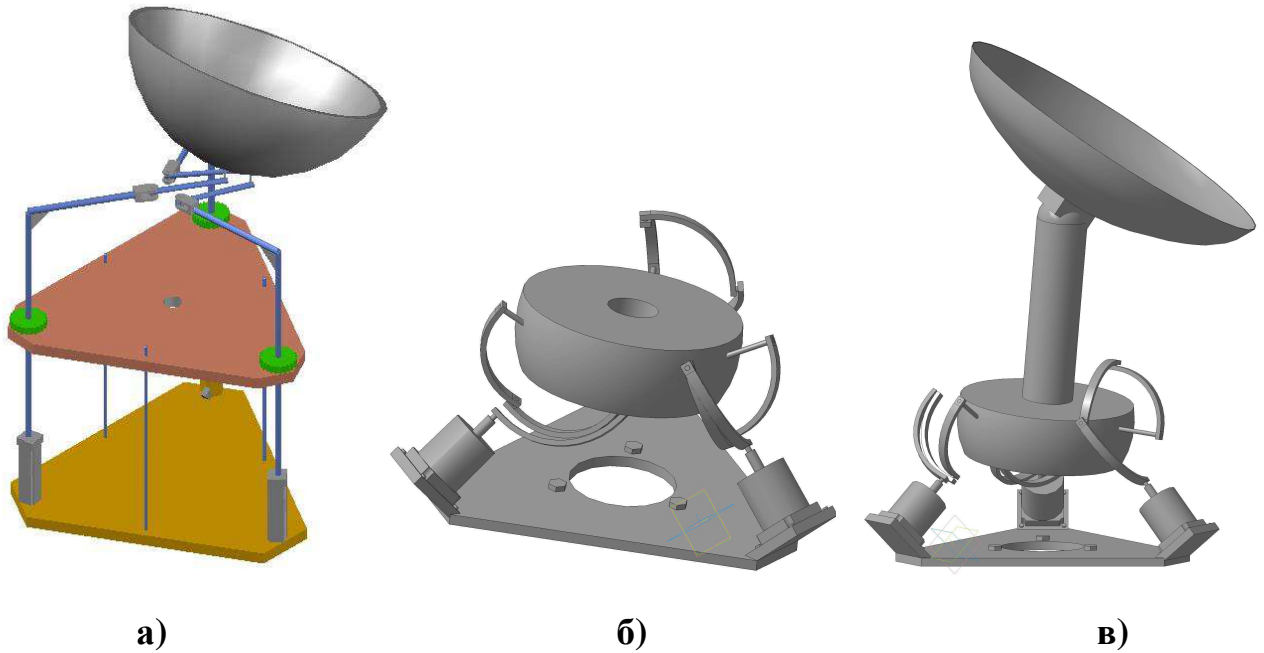


Рис.7.33 Операция шелкографии

Механизмы параллельной структуры могут быть применены в устройствах телескопов в качестве механизма поворота для наведения и вращения радиолокационных антенн. Причем могут быть использованы как сферические механизмы, так и механизмы с шестью степенями свободы (рис. 7.34).



а)

б)

в)

Рис.7.34 Устройства ориентации антенны.

а – механизм с шестью степенями свободы,

б, в – сферический механизм в различных исполнениях

При модернизации производства возрастает необходимость создания устройств, обладающих высокой скоростью точность, низкой себестоимостью, надежностью, возможностью полной замены человеческого труда в недоступных местах, какими обладают манипуляционные механизмы параллельной структуры.

Приведенные примеры показывают возможное широкое применение манипуляторов параллельной структуры на предприятиях текстильной и легкой промышленности и других отраслях.

Выводы по главе 7

1. В данной главе представлены экспериментальные конструкции исследуемых механизмов параллельной структуры с тремя степенями свободы различных классов, чертежи узлов и отдельных элементов.
2. Показано, что механизмы параллельной структуры являются простыми конструкциями, с возможностями унификации, приводы расположены на основании, что позволяет выбирать двигатели с большой мощностью.
3. Были проведены исследования свойств механизмов – рабочая зона, особые положения, повторяемость, грузоподъемность. Результаты экспериментальных исследований физических моделей манипуляторов в целом подтвердили работоспособность предложенных конструкций. Результаты экспериментов совпадают с результатами расчетов, что позволяет разработать рекомендации по проектированию механизмов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате анализа парка роботов, применяемых в текстильной и легкой промышленности и выполняемых ими операций, установлено, что наиболее востребованными являются устройства, выполняющие плоские, поступательные и вращательные движения.

На основе принципов структурно-параметрического синтеза предложены схемы механизмов различных классов: плоских, поступательно-направляющих и сферических. Установлено, что механизмы параллельной структуры могут быть получены либо путем присоединения кинематических цепей, налагающих повторяющиеся связи, либо путем присоединения кинематических цепей, налагающих различные связи и отбирающие по одной степени свободы.

Разработана методика комплексного решения задачи кинематики с учетом сингулярностей и точности. Установлено, что методика линейной теории точности позволяет определить ошибки положения выходного звена механизмов параллельной структуры с учетом неточностей изготовления звеньев. Данный вывод был проверен на основе нелинейной теории точности.

Установлено, что при проведении кинематического и динамического анализа плоские, поступательно-направляющие и сферические механизмы с пятью кинематическими парами в каждой кинематической цепи могут быть заменены эквивалентными с тремя кинематическими парами в каждой цепи.

Предложен новый динамический критерий близости к особым положениям механизмов через частотные характеристики. При приближении к особым положениям первая собственная частота уменьшается в десятки и сотни раз, что связано с уменьшением жесткости по одной степени свободы.

Разработан алгоритм управления механизмами параллельной структуры, обеспечивающий минимизацию ошибки по координате, скорости и ускорению, а также устойчивое движение по заданному закону. При управлении механизмом в области особых положений предложено использовать дополнительные приводы. При приближении к особым положениям основные приводы отключаются и

включаются дополнительные. После выхода из особого положения происходит выключение дополнительных приводов и включение основных. Таким образом, дополнительные приводы позволяют избежать перегрузок основных приводов и исключить потерю управляемости.

Показано, что в механизмах параллельной структуры существует динамическое взаимовлияние между степенями свободы. Усилие в каждом приводе зависит от положения, скорости и ускорения движения по другим координатам. Этот эффект был проверен на примере нелинейных колебаний.

Показано, что конструкция механизмов параллельной структуры обладает простотой и возможностями унификации. Это повышает надежность эксплуатации данных технических систем и обеспечивает их ремонтпригодность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов В.Ф. Технологические процессы производства изделий легкой промышленности / В.Ф. Абрамов, В.В. Костылева, Е.В. Литвин, В.Н. Соколов, И.В. Соколов. Часть I под общей редакцией проф., д.т.н. Фукина В.А. – М.: Московский государственный университет дизайна и технологии, 2003. – 572 с.
2. Ализаде Р.И. Функциональный синтез пространственных трехстепенных манипуляторов. / Р.И. Ализаде // Проблемы машиностроения и надежности машин.– 1994. – № 5. – С.129–133.
3. Аракелян В. Исследование особых положений манипулятора с параллельной структурой "Паминса" /В. Аракелян, С. Брио, В.А. Глазунов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2006. – №1. – С. 80-88.
4. Арзуманян К.С. Синтез структур 1-координатных систем для исследования и диагностирования промышленных роботов / К.С. Арзуманян, А.Ш. Колискор// Испытания, контроль и диагностирование гибких производственных систем. – 1988. –С. 70–81.
5. Артоболевский И.И. Синтез плоских механизмов. /И.И. Артоболевский, Н.И. Левитский, С.А. Черкудинов – М.: Физматгиз, 1959. – 184 с.
6. Артоболевский И.И. Роботы /И.И. Артоболевский, А.Е. Кобринский // Машиноведение. – 1970. –№ 5. –С.3–11.
7. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: учеб. для втузов. / И.И. Артоболевский. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 640 с.
8. Бабаков И.М. Теория колебаний. /И.М. Бабаков. – М.:Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1957. – 628 с.
9. Белянин П.Н. Роботтехнические системы для машиностроения. / П.Н. Белянин. – М.:Машиностроение, 1986– 250 с.
- 10.Бессекерский В.А. Теория систем автоматического регулирования. /В.А. Бессекерский, Е.П. Попов. – М.: Наука, 1975 – 768 с.
11. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой. / А.П. Бессонов –М.: Наука, 1967. –279 с.

12. Биргер И.А. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т.3 / И.А. Биргер, Я.Г. Пановко. – М.:Машиностроение, 1968. – 568 с.
13. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. / Н.Н. Боголюбов Н.Н., Ю.А. Митропольский. – Гос. Изд. техн-теор. лит., 1955 – 448 с.
14. Брагинский М.А. Промышленные роботы-манипуляторы в кожевенном производстве./ М.А. Брагинский. – М.:Легпромбытиздат, 1985. – 64 с.
15. Бруевич Н.Г. Кинестатика пространственных механизмов. / Н.Г. Бруевич // Тр. Военно-возд. акад. им. Н.Е.Жуковского. – 1937. – Вып. 22. – С.3–85.
16. Бруевич Н.Г., Правоторова Е.А., Сергеев В.И. Основы теории точности механизмов / Н.Г. Бруевич, Е.А. Правоторова, В.И. Сергеев. – М.: Наука, 1988 – 240 с.
17. Бруевич Н.Г., Сергеев В.И. Основы нелинейной теории точности и надежности устройств /Н.Г. Бруевич, В.И. Сергеев – М.: Наука, 1976 – 136 с.
18. Быков Р.Э. Моделирование модулей кристаллических структур с помощью механизмов с избыточными связями./Р.Э. Быков, В.А. Глазунов, Д.Л. Тытик, Н.Н. Новикова // Проблемы машиностроения и надежности машин. Машиноведение. – 2002. – № 2. –С. 89–96.
19. Воробьев Е.И. Теория пространственных шарнирных механизмов. / Е.И. Воробьев, Ф.М. Диментберг. – М.: Наука, 1991. – 262 с.
20. Вукобратович М. Управление манипуляционными роботами: Пер. с англ. / М. Вукобратович, Д.М. Стокич. – М. Наука, 1985. – 358 с.
21. Вульфсон И.Л. Динамические расчеты цикловых механизмов. / И.Л. Вульфсон. –Л.:Машиностроение, 1976 – 281 с.
22. Ганиев Р. Ф. Кононенко В. О. Колебания твердых тел. / Р.Ф. Ганиев Р.Ф., В.О. Кононенко. –М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 432 с.
23. Ганулич А.А. Роботизированная технология швейных изделий. /А.А. Ганулич. – М.: Легпромбытиздат, 1990. – 200 с.

24. Глазунов В.А. Структура пространственных механизмов. Группы винтов и структурные группы / В.А. Глазунов // Инженерный журнал. Справочник. – 2010. № 3. – С. 1–24.
25. Глазунов В.А. Об особом положении пространственного пятизвенника, образованного из двух механизмов Беннета / В.А. Глазунов, Ф.М. Диментберг // Машиноведение. –1984. – № 5.
26. Глазунов В.А. Управление механизмами параллельной структуры при переходе через особые положения. / В.А. Глазунов, М.Г. Есина, Р.Э. Быков // Проблемы машиностроения и надежности машин. –2004. –№ 2. – С.78-84.
27. Глазунов В.А. Пространственные механизмы параллельной структуры / В.А. Глазунов, А.Ш. Колискор, А.Ф. Крайнев – М.: Наука, 1991. – 95 с
28. Глазунов В.А. Принципы классификации и методы анализа пространственных механизмов с параллельной структурой / В.А. Глазунов, А.Ш. Колискор, А.Ф. Крайнев, Б.И. Модель // Проблемы машиностроения и надежности машин. –1990. –№1. – С. 41-49.
29. Глазунов В.А. Об особенностях устройств относительного манипулирования. / В.А. Глазунов, А.Б. Ласточкин, А.Н. Терехова, Ву Нгок Бик // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2007. –№2. – С. 77–85.
30. Глазунов В.А. К анализу и классификации устройств относительного манипулирования / В.А. Глазунов, А.Б. Ласточкин, К.А. Шалюхин, П.О. Данилин // Проблемы машиностроения и надежности машин, –2009. –№ 4.– С. 81-85.
31. Глазунов В.А. Решение задачи о скоростях манипулятора параллельной структуры с тремя степенями свободы. / В.А. Глазунов, С.В. Палочкин, М.А. Ширинкин, С.В. Хейло //Технологические проблемы прочности: Сб. Материалы XVII международного семинара. – Подольск. –2010. – С.87–94.
32. Глазунов В.А. Манипулятор параллельной структуры с четырьмя степенями свободы / В.А. Глазунов, С.В. Хейло, М.А. Ширинкин, П.А. Ларюшкин, А.В. Ковальчук // Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. Часть 2, №4. – С. 92-94.

33. Глазунов В.А. Применение манипуляторов параллельной структуры в измерительном оборудовании для объектов наноиндустрии/ В.А. Глазунов, С.В. Хейло, П.А. Ларюшкин // Тезисы докладов II-й научно-практической конференции и каталог выставки "Нанотехнологии в текстильной и легкой промышленности" – М.: ГОУВПО МГТУ им. А.Н. Косыгина, –2011. – С. 25-26.
34. Глазунов В.А., Хейло С.В., Ларюшкин П.А. Бифуркация манипулятора параллельной структуры / В.А. Глазунов, С.В. Хейло, П.А. Ларюшкин// Россия: тенденции и перспективы развития. Ежегодник. Вып. 6. Часть 1 – М.:ИНИОН РАН, – 2011. – С. 674 –678.
35. Глазунов В.А. Роботы параллельной структуры – альтернатива антропоморфным роботам / В.А. Глазунов, С.В. Хейло // Естественный и искусственный интеллект: методологические и социальные проблемы. Под ред. Д.И. Дубровского и В.А. Лекторского – М. «Канон +» РООИ «Реабилитация», 2011. – С. 201 –210.
36. Глазунов В.А. Частотный критерий особых положений сферического манипулятора параллельной структуры / В.А.Глазунов, С.В. Хейло // Сб. трудов XVII Симпозиум «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем» DYVIS.– 2012. –С.53–56.
37. Глазунов В.А. Определение особых положений манипулятора с параллельной структурой / В.А. Глазунов, С.В. Хейло, М.А. Ширинкин // Сб. Тезисы докладов Международной научно – технической конференции "Современные технологии и оборудование текстильной промышленности" (ТЕКСТИЛЬ-2010) – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина. –2010. –С.178–179.
38. Давиташвили Н.С. Динамика сферических механизмов./ Н.С. Давиташвили. – М.: Наука, 1992. – 256 с.
39. Данилин П.О. Разработка и анализ механизмов параллельной структуры с групповой кинематической развязкой: дис. ...канд. техн. наук: – М., 2011. – 141 с.
40. Демидов С.М. Анализ углов давления и особых положений модулей параллельной структуры, предназначенных для механизмов относительного манипулирования / С.М. Демидов, В.А. Глазунов, А.Б. Ласточкин, Ю.Н. Артеменко // Проблемы машиностроения и надежности машин, –2011. –№ 5. – С. 11-20.

41. Диментберг Ф.М. Об особенных положениях пространственных механизмов. / Ф.М. Диментберг // Машиноведение. –1977. – № 5. –С. 53 –58.
42. Диментберг Ф.М. Теория винтов и ее приложения. /Ф.М. Диментберг. –М.: Наука, 1978, –327 с.
43. Диментберг Ф.М. Теория пространственных шарнирных механизмов. /Ф.М. Диментберг. –М.: Наука, 1982. – 336 с.
44. Добровольский В.В. Построение относительных положений звеньев пространственного семизвенника по методу сферических изображений. / В.В. Добровольский В.В. // Тр. семинара по ТММ.: Изд-во АН СССР. – 1952. –Т. 12. –Вып. 42. – С.52 –62.
45. Добровольский В.В. Теория сферических механизмов. / В.В. Добровольский. – М., 1947 – 233 с.
46. Заблонский К.И. Оптимальный синтез схем манипуляторов промышленных роботов /К.И. Заблонский, Н.Т. Монашко, Б.Н. Щекин – Киев: Техника, 1989. – 152 с.
47. Зейлигер Д.Н. Комплексная линейчатая геометрия. –М.: Гостехиздат, 1934. –196 с.
48. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами: Учебник для втузов. / С.Л. Зенкевич, А.С. Ющенко. – М.:Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2004.–480с.
49. Зиновьев В.А. Кинематический анализ пространственных механизмов. /В.А. Зиновьев// Тр.семинара по ТММ.: Изд-во АН СССР. –1951. – Т. 11. – Вып. 42. – С. 52-99.
50. Иосилевич Г.Б. Прикладная механика. /Г.Б. Иосилевич, П.А. Лебедев, В.С. Стреляев. – М.: Машиностроение, 1985. – 576 с.
51. Кислицын С.Г. Тензорный метод в теории пространственных механизмов. / С.Г. Кислицын // Тр. семинара по ТММ.: Изд-во АН СССР. –1954. – Т. 14, Вып. 54. –С. 51–75.
52. Кинематика, динамика и точность механизмов: Справочник / Под ред. Г.В. Крейнина. –М.: Машиностроение, 1984. –224 с.

53. Климов В. А. Робототехнические системы в текстильной и легкой промышленности / В.А. Климов, В.Н. Гончаренко, А.А. Ганулич – М.: Легпромбытиздат, 1991. – 312 с.
54. Кобринский А.А. Манипуляционные системы роботов: основы устройства, элементы теории./ А.А. Кобринский, А.Е. Кобринский. – М.: Наука, 1989. – 344 с.
55. Козлов В.В., Макарычев В.П., Тимофеев А.В., Юрьевич Е.И. Динамика промышленных роботов / В.В. Козлов, В.П. Макарычев, А.В. Тимофеев, Е.И. Юрьевич. –М.:Наука, 1984. –336 с.
56. Колискор А.Ш. Разработка и исследование промышленных роботов на основе 1-координат. / А.Ш. Колискор // Станки и инструмент. –1982. – № 12 – С. 21 –24.
57. Коловский М.З. Основы динамики промышленных роботов /М.З. Коловский, А.В. Слоущ. – М.: Наука, 1988. – 240 с.
- 58.Коловский М.З. Динамика машин. / М.З. Коловский. – Л.: Машиностроение, 1989 – 263 с.
59. Конструирование машин: справочно-методическое пособие, т. I. / Под общ. ред. К.В.Фролова. – М.: Машиностроение, 1994. – 528 с.
60. Котельников А.П. Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. /А.П. Котельников. – Казань, 1895. –216 с.
61. Крайнев А.Ф. Функциональная классификация механизмов. /А.Ф. Крайнев// Проблемы машиностроения и надежности машин. –1993. – № 5. – С.10–20.
62. Крайнев А.Ф. Новые механизмы относительного манипулирования / А.Ф. Крайнев, В.А. Глазунов // Проблемы машиностроения и надежности машин. –1994. – №5. – С. 106–117.
63. Крайнев А.Ф. Разработка механизмов параллельной структуры для малых перемещений с упругими изгибными кинематическими парами / А.Ф. Крайнев, В.А. Глазунов, В.И. Нагорных // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1992.–№ 4.–С. 79–86.
64. Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам /А.Ф. Крайнев. – М.:Машиностроение, 1987. – 560 с.

65. Крайнев А. Ф. Механика от греческого *mechanice (teche)* – искусство построения машин. Фундаментальный словарь /А.Ф. Крайнев.–М.: Машиностроение, 2000. –904 с.
66. Крайнев А. Ф. Идеология конструирования /А.Ф. Крайнев. –М.: Машиностроение, 2003. –384 с.
67. Крайнев А.Ф. Разработка установок для лазерной резки на основе механизмов параллельной структуры / А.Ф. Крайнев, Л.К. Ковалев, В.Г. Васецкий, В.А. Глазунов // Проблемы машиностроения и надежности машин. –1994. – №6. – С. 84-93.
68. Красовский А.А. Основы автоматики и технической кибернетики / А.А. Красовский, Г.С. Поспелов. –Л.:Госэнергоиздат, 1962. – 532 с.
69. Корендясев А.И. Манипуляционные системы роботов / А.И. Корендясев, Б.Л. Саламандра, Л.И. Тывес и др. Под ред. А.И. Корендясева. – М.: Машиностроение, 1989. – 472 с.
70. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели / П.Д. Крутько. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1988. –328 с.
71. Ларюшкин П.А. Решение задачи о положениях параллельного манипулятора с тремя степенями свободы / П.А. Ларюшкин, В.А. Глазунов, С.В. Хейло // Справочник. Инженерный журнал с приложением. –2012. –№2. – С. 16-20.
72. Ларюшкин П.А. Разработка и исследование пространственного манипулятора параллельной структуры с тремя поступательными степенями свободы для робототехнических систем предприятий текстильной и легкой промышленности: дис. ...канд. техн. наук: – М., 2013. – 169 с.
73. Ласточкин А.Б. Разработка и исследование систем механизмов параллельной структуры для их совместного относительного манипулирования. дис. ...канд. техн. наук: – М., 2009. – 120 с.
74. Лебедев П.А. Кинематика пространственных механизмов / П.А. Лебедев. –М.: Машиностроение, 1987. –280 с.
75. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин: учеб. пособие для вузов / Н.И. Левитский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1990. – 592 с.

76. Леонов Л.П. Роботехнические производственные комплексы в лесной и деревообрабатывающей промышленности / Л.П. Леонов, А.А. Кудинов. –М.:ГОУ ВПО МГУЛ, 2009–339 с.
77. Лунев В.В. Решение задач о положениях механизма методом многоугольников Ньютона. / В.В. Лунев, С.Ю. Мисюрин // Проблемы машиностроения и надежности машин. –1994. – № 2. – С.26–31.
78. Малышев А.П. Анализ и синтез механизмов с точки зрения их структуры / А.П. Малышев // Изв. Томского технолог. ин-та. – 1923. – Т. 44. –Вып. 2. – С. 1–78.
79. Мардер Б.О. О ветвлении функции положения выходного звена пространственного двухкривошипного двухконтурного механизма $VBCnCnCC$. / Б.О. Мардер, П.А. Лебедев // Машиноведение. – 1986. – №4. – С. 30–39.
80. Медведев В.С. Системы управления манипуляционных роботов / В.С. Медведев, А.Г. Лесков, А.С. Ющенко. – М.: Наука, 1978. – 416 с.
81. Мудров П. Г. Пространственные механизмы с вращательными парами / П.Г. Мудров. – Казань: Казанский сельскохозяйственный институт им. М. Горького, 1976. – 265 с.
82. Овакимов А.Г. Об особых положениях одноконтурных пространственных механизмов с несколькими степенями свободы /А.Г. Овакимов // Машиноведение. – 1989. – №4. – С. 11–18.
83. Палочкин С.В. Решение задачи о положениях сферического манипулятора параллельной структуры / С.В. Палочкин, В.А. Глазунов, С.В. Хейло // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. –2011г. – №7– С.111–115.
84. Патент РФ на изобретение №2465124. / В.А. Глазунов, С.В. Палочкин, С.В. Хейло, А.В. Ковальчук. Пространственный сферический механизм с тремя степенями свободы. № 2011112569/02, 04.04.2011. – 5 с.
85. Патент РФ на полезную модель №110326. /В.А. Глазунов, С.В. Палочкин, С.В. Хейло, А.В. Ковальчук. Пространственный сферический механизм с тремя степенями свободы. № 2011112576/02, 04.04.2011. – 2 с.

86. Патент РФ на изобретение № 2466013 / В.А. Глазунов, С.В. Палочкин, С.В. Хейло, П.А. Ларюшкин. Пространственный механизм с тремя поступательными степенями свободы. № 2011120038/02, 19.05.2011. – 2 с.
87. Патент РФ на изобретение № 2466014 / В.А. Глазунов, С.В. Палочкин, С.В. Хейло, П.А. Ларюшкин, М.А. Ширинкин, Ю.Н. Артеменко, Ю.Т. Каганов. Пространственный механизм с пятью степенями свободы. № 2011120039/02, 19.05.2011. – 2 с.
88. Патент РФ на полезную модель № 113193 / В.А. Глазунов, С.В. Палочкин, С.В. Хейло, П.А. Ларюшкин, М.А. Ширинкин, Ю.Н. Артеменко, Ю.Т. Каганов. Пространственный механизм с шестью степенями свободы. № 2011120036/02, 19.05.2011. – 2 с.
89. Патент РФ на полезную модель № 135283 / Н.Ю. Носова, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин, С.В. Хейло. Пространственный механизм с пятью степенями свободы. № 2013132023/02, 11.07.2013. – 2 с.
90. Патент РФ на полезную модель № 113193 / А.В. Календарев, В.А. Глазунов, А.Е. Лысогорский, С.В. Палочкин, С.В. Хейло, Л.В. Комиссарук. Пространственный механизм с четырьмя степенями свободы. № 2012127591/02, 03.07.2012. – 2 с.
91. Патент на полезную модель № 88601 Российская Федерация. /В.А. Глазунов, М.А.Ширинкин, С.В. Палочкин. Пространственный механизм с четырьмя степенями свободы №2009121390/22, 20.11.2009; бюл. № 32. – 2 с.
92. Патент РФ 2060135. / А.Ф. Крайнев, Б.Г. Васецкий, П.К. Ковалев, В.А. Глазунов, А.К. Алешин. Установка для лазерной резки №920093221/08, 01.12.1992.
93. Пейсах Э.Е. Критерии передачи движения для рычажных механизмов. /Пейсах Э.Е. // Машиноведение. – 1986. – № 1. – С. 45–51.
94. Пол Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора / Р. Пол. –М.: Наука, 1976. – 104 с.
95. Попов Е.П. Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы / Е.П. Попов, А.Ф. Верещагин, С.П. Зенкевич. –М.: Наука, 1978. – 400 с.
96. Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования и управления / Е.П. Попов. – М.: Наука., 1989. – 301 с.

97. Подъемно-транспортные системы для комплексной механизации текстильных предприятий: Учебное пособие для вузов. / Под ред. Сыромятникова В.С. – М.: МГТУ им А.Н. Косыгина, 1999. – 344 с.
98. Рекомендации по основным направлениям механизации погрузочно-разгрузочной, транспортных и складских работ на предприятиях шелковой, трикотажной и текстильно-галантерейной промышленности и автоматизации химических станций красильно-отделочных производств. – М.: ЦПКТБ текстильпром Минтекстильпрома РСФСР, 1989. – 216 с.
99. Решетов Л.Н. Самоустанавливающиеся механизмы. Справочник / Л.Н. Решетов. – М.: Машиностроение, 1979. – 334 с.
100. Росс Б. О винтовых осях и других особых линиях, связанных с пространственным перемещением твердого тела. /Б. Росс// Тр. Америк. о-ва инженеров-механиков. Конструирование и технология машиностроения. – 1967. – №1. – С. 120–131.
101. Саркисян Ю.Л. Аппроксимационный синтез механизмов / Ю.Л. Саркисян. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
102. Саркисян Ю.Л., Парикян Т.Ф. Принципы построения пространственных поступательно-направляющих механизмов. / Ю.Л. Саркисян, Т.Ф. Парикян// Машиноведение. – 1988. – № 4. – С. 12–20.
103. Соболев И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями /И.М. Соболев, Р.Б. Статников. –М.: Наука, 1981. – 110 с.
104. Сомов П.О. Векториальный анализ и его приложения /П.О. Сомов. – С.-Пб.: Тип. Стасюлевича, 1907. – 263 с.
105. Теория механизмов и механика машин: учеб. для вузов./ К. В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др; под ред. К. В. Фролова. 2-е изд. перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 1998. – 496 с.
106. Тимофеев А.В. Управление роботами. Учеб. Пособие/ А.В. Тимофеев. – Л.Изд-во Ленинградского ун-та, 1985. – 240 с.
107. Тывес Л.И., Маркевич С.В. Оптимальное по быстродействию управление движением робота по собственной траектории / Л.И. Тывес, С.В. Маркевич// Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1993. – № 5 – С. 76– 82.

108. Хант К.Х. Кинематические структуры манипуляторов с параллельным приводом / К.Х. Хант // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Конструирование и технология машиностроения. –1983. – № 4. – С. 201–210.
109. Хейло С.В. Решение задачи о скоростях манипулятора с тремя степенями свободы с применением теории винтов /С.В. Хейло // Проблемы машиностроения и автоматизации. –2011. –№ 1. –С. 77–81.
110. Хейло С.В. Частотный критерий особых положений манипулятора параллельной структуры /С.В. Хейло // Проблемы машиностроения и автоматизации. –2013. –№ 1. –С. 65–72.
111. Хейло С.В. Синтез сферических манипуляторов параллельной структуры /С.В. Хейло // Справочник. Инженерный журнал. –2012. –№ 6. – С. 23–28.
112. Хейло С.В. Структурно-геометрический анализ сферического манипулятора параллельной структуры /С.В. Хейло // Справочник. Инженерный журнал. –2012. –№ 12. – С. 9–14.
113. Хейло С.В. Колебания манипулятора параллельной структуры с тремя степенями свободы /С.В. Хейло// Сб. IX всероссийская научная конференция им. Ю.И. Неймарка «Нелинейные колебания механических систем», Н. Новгород, –2012– С. 957–961.
114. Хейло С.В. Решение задачи кинематики сферического манипулятора параллельной структуры /С.В. Хейло // Машиностроение и инженерное образование. – 2010. –№ 4. – С. 18–22.
115. Хейло С.В. Решение задачи об управлении поступательно-направляющим механизмом параллельной структуры /С.В. Хейло, В.А. Глазунов// Справочник. Инженерный журнал. –2013. –№ 10. – С. 17–24.
116. Хейло С.В. Манипуляционные механизмы параллельной структуры. Структурный синтез. Кинематический и силовой анализ: монография /С.В. Хейло, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин– М.: ФГБОУ ВПО МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2011. – 153с.

117. Хейло С.В. Решение задачи кинематики поступательно-направляющего манипулятора /С.В. Хейло, В.А. Глазунов, Р.Ю. Сухоруков// Машиностроение и инженерное образование. –2011. –№ 4. – С. 11–17.
118. Хейло С.В. Решение задачи о скоростях и особых положениях сферического манипулятора параллельной структуры /С.В. Хейло, В.А. Глазунов, Во Динь Тунг// Машиностроение и инженерное образование. – 2011. –№ 1. – С. 2–9.
119. Хейло С.В. Анализ ускорений и нелинейных колебаний механизма параллельной структуры /С.В. Хейло, В.А. Глазунов, Ю.В. Кулемкин, В.Л. Эфрос // Проблемы машиностроения и надежности машин. –2013. – №3 – С. 9–17.
120. Хейло С.В. Возможные применения механизмов параллельной структуры /С.В. Хейло, В.А. Глазунов, М.А. Ширинкин, А.В. Календарев// Проблемы машиностроения и надежности машин. –2013. – №5 – С. 19–24.
121. Хейло С.В. Манипуляционные механизмы параллельной структуры для робототехнических комплексов предприятий текстильной промышленности /С.В. Хейло, В.А. Глазунов// Вестник Московского государственного текстильного университета: Тематический сборник научных трудов «Инновационные технологии и материалы». –2012. –С. 73–76.
122. Хейло С.В., Ларюшкин П.А. Определение рабочей зоны манипуляторов параллельной структуры /С.В. Хейло, П.А. Ларюшкин // Справочник. Инженерный журнал. –2013. – №2. – С. 27-31.
123. Хейло С.В. Определение рабочего пространства манипуляторов /С.В. Хейло П.А. Ларюшкин // Тезисы докладов Международной научно-технической конференции "Современные технологии и оборудование текстильной промышленности" (ТЕКСТИЛЬ-2011). –М.: ФГБОУ ВПО МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2011. – С. 193-194.
124. Хейло С.В. Задача об ускорении поступательно-направляющего механизма параллельной структуры /С.В. Хейло, М.Г. Лукашова// Современные наукоемкие технологии и перспективные материалы текстильной и легкой промышленности (Прогресс 2013): сборник материалов международной научно-практической конференции . Часть 2. –Иваново:ИГТА, 2013.–С.175–176.

125. Хейло С.В. Повышение технической и эксплуатационной эффективности устройств манипулирования /С.В. Хейло, А.Е. Лысогорский // Тезисы докладов Международной научно-технической конференции "Современные технологии и оборудование текстильной промышленности" (ТЕКСТИЛЬ-2012): тезисы докладов. Часть 2. – М.: ФГБОУ ВПО МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2012. – С. 24.
126. Хейло С.В. Определение собственных частот колебаний манипулятора параллельной структуры /С.В. Хейло, М.А. Ширинкин, В.А. Глазунов// Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. –2011г. – №4–С.120–124.
127. Черноусько Ф.Л. Манипуляционные роботы / Ф.Л.Черноусько, Н.А. Болотник, В.Г. Градецкий. – М.:Наука, 1989 – 327 с.
128. Шахинпур М. Курс робототехники: Пер. с англ./ М. Шахинпур. – М.:Мир, 1990 – 527 с.
129. Ширинкин М.А. Исследование и разработка манипуляционных механизмов параллельной структуры для подъёмно-транспортных систем предприятий текстильной промышленности: дис. ...канд. техн. наук: – М., 2011. – 121 с.
130. Ширинкин М.А. Решение задачи о скоростях и особых положениях манипулятора параллельной структуры / М.А. Ширинкин, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин, С.В. Хейло// Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. –2011г. –№3–С.95–101.
131. Ширинкин М.А. Структурный синтез работа параллельной структуры с четырьмя степенями свободы /М.А. Ширинкин, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин, С.В. Хейло, А.В. Ковальчук// Искусственный интеллект: философия, методология, инновации. Материалы IV Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Часть 2 – М. МИРЭА, 2010. – С.91-93.
132. Ширинкин М.А. Исследование подвижностей в механизмах параллельной структуры /М.А. Ширинкин, В.А. Глазунов, С.В. Палочкин, С.В. Хейло// XXII Международная Иновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС-2010) «Будущее машиностроения России»: сборник материалов конференции с элементами научной школы для молодежи (Москва, 26-29

ноября 2010 г.). – М: Цифровичок, 2010 г. – 221 с.

133. Ширинкин М.А. Управление экспериментальным роботом с четырьмя степенями свободы / М.А. Ширинкин, С.В. Хейло, В.А. Глазунов, Во Динь Тунг // Искусственный интеллект: философия, методология, инновации. Материалы V Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, – М.МИРЭА, 2011. – С.177–178.

134. Щербаков В.С. Автоматизация процесса моделирования траектории движения рабочего органа робота-манипулятора: Монография / В.С. Щербаков, И.А. Реброва, М.С. Корытов, Е.И. Пастухова. – Омск: Филиал ГОУ ВПО РЗИТиЛП, 2009. – 120 с.

135. Alizadeh D. On the Computation of the Home Posture of the McGill Schoenflies-Motion Generator. // D. Alizadeh, J. Angeles, S. Nokleby // Computation Kinematics. Proceedings of the 5 th International Workshop. Springer. – 2009. – P. 149–158.

136. Alizadeh D. Structural Synthesis of New Parallel and Serial Platform Manipulators /D. Alizadeh, F. Can, E. Gezgin, O. Selvi // Proceedings of 12th IFToMM World Congress in Mechanism and Machine Science. Besançon, France, June 18-21 – 2007 – P.421 – 427.

137. Altuzarra O. Partially Decoupled Parallel Manipulators Based on Multiple Platforms / O. Altuzarra, M. Loizaga, V. Petuya, E. Amezua // Proceedings of 12th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms. Besançon, France, June 18-21, –2007. – P.322 – 328.

138. Angeles J. The Qualitative Synthesis of Parallel Manipulators. / J. Angeles // Journal of Mechanical Design. – 2004. Vol. 126. – P. 617–624.

139. Arakelian V. Static and Dynamic Analysis of the PAMINSA /V. Arakelian, S. Guegan, S. Briot // ASME 2005. International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. Long Beach. California. USA. – 2005. – P. 24–28.

140. Arakelian V. Increase of singularity-free zones in the workspace of parallel manipulators using mechanisms of variable structure /V. Arakelian, S. Briot, V. Glazunov // Mechanism and Machine Theory. –2008, Vol. 43, – P. 1129–1140.

141. Arakelian V. Improvement of functional performance of spatial parallel manipulators using mechanisms of variable structure / V. Arakelian, S. Briot, V. Glazunov // Proceedings of the Twelfth World Congress in Mechanism and Machine Science. (IFTToMM), Besancon, France. – 2007, Vol. 5. – P. 159–164.
142. Baker J. E. Overconstrained 5-Bars with Parallel Adjacent joint axes. Pt. 1. Method of Analysis /J.E. Baker // Mechanism and Machine Theory. – 1978. – Vol. 13, N 2. – P. 213 – 218.
143. Baker J.E. An Analysis Of the Bricard Linkages /J.E. Baker // Mechanism and Machine Theory. – 1980. Vol. 15, N 4. – P. 267–286.
144. Ball R.S. A Treatise on the Theory of Screws / R.S. Ball. –Cambridge: Cambridge University Press, 1900. – 544 p.
145. Bennet G.T. A New Mechanism / G.T. Bennet // Engineering. – 1903. – P. 778–783.
146. Bonev I.A. Delta Robot – The Story of Success, 2001. Режим доступа: <http://www.parallemic.org/Reviews/Review002>.
147. Bonev I.A. Singularity Analysis of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms via Screw Theory / I.A. Bonev, D. Zlatanov, C.M. Gosselin // Journal of Mechanical Design, – 2003. –Vol. 125, № 3. – P. 573–581.
148. Briot S. Analyse et Optimisation d’une Nouvelle Famille de Manipulateurs Parallèles aux Mouvements Découplés /S. Briot. These en vue de l’obtention du Doctorat de Genie Mecanique. 2007. – 188 p.
149. Briot, S. Design and analysis of the properties of the delta inverse robot / S.Briot, V. Arakelian, V. Glazunov // Proceedings of the X International Conference on the Theory of Machines and Mechanisms. Liberec, Czech Republic. – 2008 – P.346-350.
150. Briot S. Singularity Analysis of PAMINSA Manipulators / S. Briot, V. Arakelian // Proceedings of 12th IFTToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms. Besançon, France, June 18-21. –2007. – P. 752–757.
151. Carricato M. On the topological and geometrical synthesis and classification of translational parallel mechanisms. /M. Carricato, V. Parenti-Castelli // Pr. of the XI World Congress in Mechanism and Machine Science. Tianjin, China. – 2004. – P. 1624–1628.

152. Carricato M. Fully Isotropic Four-Degrees-of-Freedom Parallel Mechanisms for Schoenflies Motion /M. Carricato// International Journal of Robotics Research. – 2005. – Vol. 24, №5. – P. 397–414.
153. Chen W-J. A Novel 4-DOF Parallel Manipulator and its Kinematic Modelling /W-J. Chen // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. Seoul, Korea, May 23-25. –2001. – P. 3350–3355.
154. Ceccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulations / M. Ceccarelli. – Kluwer Academic Publishers, 2004. – 412 p.
155. Ceccarelli M. A Study of Feasibility for a New Wrist / M. Ceccarelli // Proceedings of the World Automation Congress. Montpellier, France, May 28-30. – 1996. – p. 1-105.
156. Ceccarelli M. A new 3 d.o.f. spatial parallel mechanism. / M. Ceccarelli // Mechanism and Machine Theory. – 1997. – N 32(8). – P.896–902.
157. Chablat D. Architecture Optimization of a 3-dof parallel mechanism for machining applications the ortoglide // D. Chablat, P. Wenger // IEEE Trans. On Robotics and automation 19. – 2003. – P.403–410.
158. Clavel R. Device for displacing and positioning an element in space. / Brevet N WO 87/03528. Classification Internationale de brevets: B25J 17/02. Date de publication internationale: 18.06.87.
159. Company O. A New High Speed 4-DOF Parallel Robot. Synthesis and Modeling Issues / O. Company, F. Marquet, F. Pierrot // IEEE Transactions on Robotics and Automation. –2003. – Vol. 19, №3. – P. 411–420.
160. Craig J.J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control / J.J. Craig. – 2nd ed. Reading. – MA: Addison-Wesley, 1989. – 544 p.
161. Denavit J. Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices. / J. Denavit, R.S. Hartenberg // Tr. ASME: Ser.E, J. Appl. Mech. – 1955. – Vol.22, N 2. – P. 215–221.
162. Dunlop G.R. Position analysis of a two DOF parallel mechanism – the Canterbury tracker / G.R. Dunlop, T.P. Jones // Mechanism and Machine Theory. – 1999. –Vol. 34(4) –P.599–614.

163. Fichter E.F. A Stewart Platform-Based Manipulator: General Theory and Practical Construction / E.F. Fichter // *International Journal of Robotics Research*. –1986. – №2, – P. 157–181.
164. Fujimoto K. Derivation and Analysis of Equations of Motion for a 6 d.o.f. Direct Drive Wrist Joint / K. Fujimoto // *IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Osaka, Japan, November 3-5, –1991. – P. 779–784.
165. Gallardo J. A Novel Five-degrees of Freedom Decoupled Robot / J. Gallardo, H. Orozco-Mendoza, J.M. Rico-Martinez // *Robotica*. –2010. – Vol. 28, №6. – P. 909–917.
166. Glazunov V. On 4-DOF Particularly Decoupled Parallel Mechanisms / V. Glazunov, S. Palochkin, S. Kheilo, M. Shirinkin, Nguyen Minh // *Proceedings of the 13th World Congress in Mechanism and Machine Science*. June 19 -23, Guanajuato, Mexico Universidad de Guanajuato (UCEA), Mexico. –2011. – 8 P.
167. Glazunov V. 3-DOF Translational and Rotational Parallel Manipulators / V. Glazunov, P. Laryushkin, S. Kheylo // *New Trends in Mechanism and Machine Science: Theory and Applications in Engineering*. –2013. – P. 199–207.
168. Glazunov V. On New Class of Parallel-Cross Mechanisms /V. Glazunov, S. Briot, V. Arakelyan, Ngyuen Minh Thanh // *Proceedings of the 5th International Workshop on Computational Kinematics*. Heidelberg, Germany, May 6-8. –2009. – P. 93–100.
169. Glazunov V. Parallel manipulator control while intersecting singular zones. /V. Glazunov, A. Kraynev, R. Bykov, G. Rashoyan, N. Novikova//*Theory and Practice of Robots and Manipulators. (RoManSy)*, *Proceedings of XV CISM-IFTToMM Symposium*, Montreal. –2004. – P.345–352.
170. Glazunov V. Design of Decoupled Parallel Manipulators by Means of the Theory of Screws / V. Glazunov // *Mechanism and Machine Theory*. –2010. –Vol.45, №2. – P. 239–250.
171. Glazunov V. Representations of constraints imposed by kinematic chains of parallel mechanisms. / V. Glazunov, R. Gruntovich, A. Lastochkin, Nguyen Mingh Than // *Proceedings of the 12th World Congress in Mechanism and Machine Science IFTToMM.- Besancon, France*. – 2007. Vol.1. –P. 380–385.

172. Gogu G. Structural Synthesis of Parallel Robots, Part 1: Methodology (Solid Mechanics and Its Applications) / G. Gogu . – Springer, 2007 – 706 p.
173. Gogu G. Structural Synthesis of Parallel Robots, Part 2: Translational Topologies with Two and Three Degrees of Freedom / G. Gogu . – Springer, 2009 – 780 p.
174. Gogu G. Structural synthesis of fully-isotropic translational parallel robots via theory of linear transformations / G. Gogu // European Journal of Mechanics, A/Solids. – 2004. – Vol. 23. – P. 1021–1039.
175. Gogu G. Fully-isotropic Parallel Manipulators With Five Degrees of Freedom /G.Gogu // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. Orlando, May 16-18. –2006. – P. 1141–1146.
176. Goldberg M. New Five-Bar and Six-Bar Linkages in Three Dimensions / M. Goldberg // Transactions of the ASME. – 1943. – Vol.46, N 6. – P. 649–661.
177. Gosselin C.M. A fully decoupled 3-dof translational parallel mechanism /C.M. Gosselin, X. Kong X, S. Foucault, I. Bonev // Parallel Kinematic Machines International Conference. Chemnitz. Germany. – 2004. – P. 595–610.
178. Gosselin C.M., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains/ C.M. Gosselin, J. Angeles // IEEE Transactions on Robotics and Automatics. –1990. – Vol.6(3). – P.281–290.
179. Gosselin C. The optimum kinematic design of a spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator / C.M. Gosselin, J. Angeles // Trans. ASME. J. Mech., Trans., and Automat. Design. – 1989. –N 2. – P. 202–207.
180. Gosselin C.M. Singularity of a special class of spherical three-degree-of-freedom parallel mechanisms with revolute actuators / C.M. Gosselin CM, J.Wang // Int. J. of Robotics Research. –2002. – Vol.21(7). – P.649–659.
181. Gosselin C. Type synthesis of three-degree-of-freedom spherical parallel manipulator /C. Gosselin, X. Kong // Int. J. of Robotics Research, –2004. – Vol.23(3). – P.237–245.
182. Gough V.E. Contribution to Discussion of Papers on Research in Automobile Stability, Control and in Tyre Performance /V.E. Gough // Pr. Autom. Div. Inst. Mech. Eng. –1956/57. – P. 392–396.

183. Gregorio R.D. A new family of spherical parallel manipulators /R.D. Gregorio // *Robotica*. –2002. –Vol.20, № 4. – P. 353–358.
184. Hara A. Synthesis of Parallel Micromanipulators / A. Hara, K. Sugimoto // *Transactions of ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, – 1989. – №1.– P. 34–39.
185. Havlik S. Analysis and Modeling Flexible Robotic (Micro) Mechanisms / S.Havlik //11th IFToMM World Congress, Tianjin. – 2004. – P. 123–130.
186. Herve J. The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design / J.Herve // *Mechanism and Machine Theory*. – 1991. – Vol. 34. N 8. – P. 719–730.
187. Herve J.M. The novel 3-RUU wrist with no idle pair /J.M. Herve, M. Karouia// *Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*. Quebec. – 2002. – P. 3–4.
188. Huda S. Dimension Syntesis of 3-URU Pure Rotation Parallel Mechanism with Respect to Singularity and Workspace / S. Huda, Y. Takeda // 12th IFToMM World Congress, Becasson. – 2007. – P. 235–242.
189. Hunt K.H. *Kinematic Geometry of Mechanisms* / K.H. Hunt –Oxford.: Clarendon Press, 1978. – 469 p.
190. Hunt K.H. Structural kinematics of in parallel actuated robot arms /K.H. Hunt // *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*. –1983. –Vol. 105(4). –P. 705–712.
191. Kerr D.R. Analysis, Properties and Design of a Stewart-Platform Transducer /D.R. Kerr // *Transactions of ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*. –1989. –№1. – P. 25–28.
192. Karouia M. A symmetrical 3-dof spherical parallel mechanism / M. Karouia, J.M. Herve // *European journal of mechanic A/solid*. –2005–P. 57–67.
193. Kheylo S. Accelerations and nonlinear oscillations of parallel spherical 1 mechanism / S. Kheylo, Nguyen Minh Thanh, V.Glazunov // *The 3-rd IFFTOM international symposium on robotics and mechatronics*, Singapore. –2013. – P.504–512.

194. Kong X., Gosselin C. Type Synthesis of Parallel Mechanisms /X. Kong, C. Gosselin . – Springer 2007. – 275 p.
195. Kong X. Type synthesis of linear translational parallel manipulators. /X. Kong, C. Gosselin // Advances in Robot Kinematics – Theory and Applications, Boston: Kluwer Academic Publishers. – 2002. – P. 411–420.
196. Kong X. Type Synthesis of 3T1R 4-DOF Parallel Manipulators Based on a Screw Theory /X. Kong, C. Gosselin // IEEE Transactions on Robotics and Automation, – 2004. –Vol.20, №2. – P. 181-190.
197. Kong X. Kinematics and singularity analysis of a novel type of 3-CRR 3-DOF translational parallel manipulator /X. Kong, C. Gosselin // The International Journal of Robotics Research. – 2002. – N 21(9). – P. 791–798.
198. Koevermans W.P. Design and performance of the four d.o.f. motion system of the NLR research flight simulator / W.P. Koevermans //In AGARD Conf. Proc. – 1975. –N 198 – P. 1–11.
199. Larochelle P.M. Design of 3-DOF spherical robotic mechanism / P.M. Larochelle // In 9th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanism, Milan, Italy. –1995 – P.245–250.
200. Laryushkin P. New 3-DOF Translational Parallel Manipulator: Kinematics, Dynamics and Workspace Analysis /P. Laryushkin, V. Glazunov // Romansy 19 – Robot Design, Dynamics and Control. Proceedings of the 19th CISM-IFTToMM Symposium. Paris, France. June, 12-15. –2012. – P. 11–18.
201. Lee K.-M. Kinematic analysis of a three-degrees-of freedom in-parallel actuated manipulator / K.-M. Lee, D.K.Shah // IEEE J. of Robotics and Automation. – 1988. – Vol. 4(3). – P. 354–360.
202. Leguay–Durand S. Optimal design of a redundant spherical parallel manipulator /S. Leguay–Durand, C. Reboulet // Robotica. – 1997. – Vol.15(4) – P.399–405.
203. Li Y. Kinematics and inverse dynamics analysis for a general 3-PRS spatial parallel mechanism / Y. Li Y, Q. Xu // Robotica. –2005. – Vol.23, №.2. –P. 219–229.
204. Li Y. Kinematic analysis and design of a new 3-DOF translational parallel manipulator / Y. Li Y, Q. Xu // ASME J. Mech. Des., –2006. – Vol.128, № 4. – P. 729–737.

205. Liu X.J. Optimum design of 3-DOF spherical parallel mechanism with respect to the conditioning and stiffness indices /X.J. Liu, Z.L. Jin, F. Gao // Mechanism and machine Theory. – 2000. – Vol. 35(9) – P.257–267.
206. Liu K. The Singularities and Dynamics of a Stewart Platform Manipulator / K. Liu, F. Lewis, G. Lebret, D. Taylor // Journal of Intelligent & Robotic Systems. –1993. – Vol. 8, №3. – P. 287–308.
207. Mavroidis C. Analysis of Overconstrained Mechanisms / C. Mavroidis, B. Roth // Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design. – 1995. –Vol. 117. – P. 69–74.
208. Mendoza-Vázquez J.R. Simulation of a Parallel Mechanical Elbow with 3 DOF /J.R. Mendoza-Vázquez// Journal of Applied Research and Technology. –2009. –Vol. 7, No. 2. –P. 113-123
209. Merlet J. P. Parallel robots / J.P. Merlet –Kluwer Academic Publishers, 2000. –372p.
210. Mianovski K. Singularity analysis of parallel manipulator POLMAN 3×2 with six degrees of freedom / K. Mianovski // 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June 18-21. – 2007. – P. 126–132.
211. Mohamed M.G. A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators / M.G. Mohamed, J. Duffy // Trans. ASME: Jour. of Mechanisms, Transmission and Automation in Design. –1985. – Vol. 107. – P. 226–229.
212. Mustafa M. Forward Kinematics of 3 Degree of Freedom Delta Robot /M. Mustafa, R. Misuari, H. Daniyal // Proceedings of 5th Student Conference on Research and Development (SCORED). Selangor, Malaysia, – 2007. –P.321–330.
213. Nguyen Minh Thanh On Translational and Spherical Parallel Manipulators with Three Degrees of Freedom / Nguyen Minh Thanh, V. Glazunov, P. Laryushkin, S. Kheylo// Problems of Mechanics. – 2013. – №1. – p. 50–54.
214. Nguyen Minh Thanh Control of 3-dof planar parallel robot / Nguyen Minh Thanh, V. Glazunov, S. Kheylo/// Problems of Mechanics. –2013. – №3. – P. 60–64.
215. Pap J-S. A robotic human masticatory system: kinematics simulations /J-S. Pap, W.L. Xu, J. Bronlund // Journal Intelligent Systems Technologies and Applications, – 2005. – Vol. 1, N. 1/2,– P. 3–16.

216. Pieper D.L. The kinematics of manipulators under computer control / D.L. Pieper, B. Roth // Proc. II Intern. Congr. on Theory of Mach. and Mech. – 1969. – Vol. 2. – P. 159–169.
217. Pernette E. Design of parallel robots in microrobotics / E. Pernette// Robotica. – 1997. – N 15(4). – P.417–420.
218. Rosati G. Performance of Cable Suspended Robots for upper Limb Rehabilitation / G. Rosati, M. Andreolli, A. Biondi, P. Gallina // Proceedings of the IEEE 10th International Conference on Rehabilitation Robotics ICORR2007, Noordwijk, 13-15 June. – 2007. –P. 385–392.
219. Ryu J-H. Parallel Manipulators, New Developments /J-H. Ryu – I-Tech Education and Publishing. 2008. – 498 p.
220. Shaoping Bai Optimum design of spherical parallel manipulators for a prescribed workspace / Shaoping Bai // Mechanism and Machine Theory. –2010. – Vol.45, №2, – P. 200–211.
221. Shoham M. Bone-mounted miniature robot for surgical procedures: concept and clinical applications / M. Shoham //IEEE Trans. On Robotics and Automation. – 2003. – Vol. 19, №5 – P.893–901.
222. Stamper R.E. A Three Degree of Freedom Parallel Manipulators with Only Translational Degrees of Freedom. Ph.D. Thesis, University of Maryland, MD, USA. 1997. – 192 p.
223. Stan S., Manic M., Szep C., Balan R. Performance Analysis of 3 DOF Delta Parallel Robot / S.Stan, M. Manic, C. Szep, R. Balan //Proceedings of the 4th International Conference on Human System Interactions (HSI), Yokohama, Japan, May 19-21. – 2011. – P.212-218.
224. Stewart D. A platform with 6 degrees of freedom / D. Stewart // Proc. of the Institution of mechanical engineers. – 1965. – Vol. 180. – P. 371–386.
225. Sugimoto K. Kinematic and Dynamic Analysis of Parallel Manipulators by Means of Motor Algebra / K. Sugimoto // Trans. ASME: Jour. of Mechanisms, Transmission and Automation in Design. – 1987. –Vol. 109, N 1. – P. 3–7.

226. Sugimoto K. Existence Criteria for Overconstrained Mechanisms Design / K. Sugimoto // Trans ASME: Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design. – 1990. – Vol. 17, N 3. – P. 295–298.
227. Sutherland G. A transmission index for spatial mechanisms / G. Sutherland, B. Roth // Trans. ASME: Journal of Engineering for Industry. – 1973. – P. 589–597.
228. Tyves L. Thanh Decoupled Parallel Manipulator with Universal Joints and Additional Constraints / L. Tyves, V. Glazunov, P. Danilin, Nguyen Minh Thanh // ROMANSY-18. Robot Design, Dynamics and Control. Proceedings of the Eighteenth CISM-IFTOMM Symposium. Udine, Italy, July 5–8, 2010. – P. 65-72.
229. Teng C.P. Shape synthesis in mechanical desing / C.P.Teng, S. Bai, J. Angeles // Acta Polytechnica, –2007. – Vol. 47, №6. –P. 56–62.
230. Tsai L.-W. Kinematics of a three-dof platform with three extensible limbs / L.-W. Tsai // ARK, Portoroz-Bernadin. – 1996. – P. 401–410.
231. Tsai L.-W. Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators/ L.-W. Tsai // –John Wiley & Sons, 1999. – 505 p.
232. Vischer P. Argos: A Novel 3-DOF Parallel Wrist Mechanism / P. Vischer, R. Clavel // International Journal of Robotics Research, –2000. – Vol. 19, №1. – P. 5–11.
233. Voinea R. Contributions a la Theorie geometrique des Vis / R. Voinea, M. Atanasiu // Buletinul Institutului Politichnic. Bucuresti. – 1959. – N 21, f. 3. – P. 69–90.
234. Waldron K. J. A Family of Overconstrained Linkages / K.J. Waldron // Journal of Mechanisms. –1967. – Vol. 2, N 2. – P. 201–211.
235. Wapler M. A Stewart Platform for Pre cision Surgery / M. Wapler, V. Urban // Transactions of the Institute of Measurement and Control. –2003. – Vol.25, N. 4. – P. 329–334.
236. Wenger P. Kinematic analysis of a new parallel machine tool: The orthoglide / P. Wenger, D. Chablat // Proceedings 7th International Symposium on Advances in Robot Kinematics. Portoroz, Slovenia – 2000 – P.275-284.
237. Wohlhart K. Irregular Polyhedral Linkages / K. Wohlhart // Pr. of the XI World Congress in Mechanism and Machine Science. Tianjin, China. – 2004. – P. 1083–1087.

238. Yan Jin. Structure Synthesis and Singularity Analysis of a Parallel Manipulator Based on Selective Actuation / Yan Jin, I-Ming Chen, Guilin Yang // Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation, New Orleans. – 2004. – P. 4533–4538.
239. Yangmin Li. Design and Development of a Medical Parallel Robot for Cardiopulmonary Resuscitation / Li Yangmin, Xu Qingsong // IEEE, ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS. – 2007. – Vol. 12, N. 3. – P. 265–273.
240. Zhao Y. Dynamics Analysis of a 5-UPS/PRPU Parallel Machine Tool / Y. Zhao // Proceedings of 12th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms. Besançon, France, June 18-21, 2007. – 8 p.
241. Zhu S.J. Singularity Analysis for Six Practicable 5-DOF Fully-symmetrical Parallel Manipulators / S.J. Zhu, Z. Huang, M.Y. Zhao // Mechanism and Machine Theory, – 2009. – Vol. 44, №4. – p. 710–725.
242. Zhen Huang. The Kinematics and Type Synthesis of Lower-Mobility Parallel Robot Manipulators / Zhen Huang. // Pr. of the XI World Congress in Mechanism and Machine Science. Tianjin, China. – 2004. –P. 65-70.
243. Zlatanov D. Constraint singularities of parallel mechanisms /D. Zlatanov, I.A. Bonev, C.M. Gosselin// Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom., Washington, DC, –2002, P. 496–502.
244. Zlatanov D. Characterization of the subsystems in the special three-systems of screws /D. Zlatanov, M. Carricato// Pr. of Romansy 20 – XX CISM-IFToMM Symposium on theory and practice of robots and manipulators. Moscow. –2014. – P. 37–45.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ЗАКРЫТОЕ АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО
«МОСКОВСКАЯ ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ОБУВНАЯ ФАБРИКА
«ПАРИЖСКАЯ КОММУНА»



CLOSED JOINT STOCK COMPANY
SHOE FACTORY MOSCOW
«PARIZHSKAYA COMMUNA»

«Утверждаю»
Заместитель генерального директора
по управлению производственным комплексом, д.т.н.
Татарчук И.Р.



27 мая 2014 г.

СПРАВКА

об использовании результатов диссертационной работы

Хейло Сергея Валерьевича

«Разработка научных основ создания манипуляционных механизмов параллельной структуры для робототехнических систем предприятий текстильной и легкой промышленности»

Предложенные в диссертации манипуляционные механизмы параллельной структуры, обладающие оригинальными свойствами, могут применяться на предприятиях кожевенно-обувной промышленности. В частности, для обработки низа обуви, для вспомогательных операций. В данных операциях исполнительный орган может перемещаться в сложной пространственной зоне и перемещать захватное устройство по заданной траектории. Поступательно-направляющие механизмы могут быть применены для перекладки обувных изделий с транспортера на рабочий стол оператора, в робототехническом комплексе для литья низа обуви, состоящем из загрузочных, выгружающих промышленных роботов. В операциях шершевания низа обуви траектория движения выходного звена зависит от размера обуви, что требует применения соответствующих манипуляционных механизмов, какими обладают механизмы параллельной структуры. Таким образом, манипуляционные механизмы параллельной структуры могут применяться на предприятиях обувной промышленности.

Начальник технического отдела

Ивкина Е.В.



УТВЕРЖДАЮ»
 Директор ООО «Тексфо»

Ю.М.Фокин

» _____ 2014 г.

АКТ

о проведении апробации поступательно-направляющего механизма параллельной структуры, разработанного Хейло Сергеем Валерьевичем в производственном процессе ООО «Тексфо»

Мы, нижеподписавшиеся, докторант Хейло С.В., проф. Глазунов В.А., главный инженер ООО «Тексфо» Рыбников С.Н. составили настоящий акт в том, что поступательно-направляющий механизм параллельной структуры с тремя кинематическими цепями, разработанный в диссертационной работе Хейло С.В., прошел апробацию в производственных условиях на текстильном предприятии «Тексфо». Использование данного механизма позволит повысить производительность работ при выполнении технологических и транспортных операций.

Главный инженер
 ООО «Тексфо»

Рыбников С.Н.

Докторант, доц.

Хейло С.В.

Научный консультант,
 д-р техн. наук, проф.

Глазунов В.А.

«УТВЕРЖДАЮ»

Руководитель Астрокосмического
центра ФИАН



академик РАН Н.С.Кардашев
«_____» _____ 2014г.

Справка

об использовании результатов диссертационной работы
Хейло Сергея Валерьевича

«Разработка научных основ создания манипуляционных механизмов параллельной структуры для робототехнических систем предприятий текстильной и легкой промышленности».

В ходе создания космического телескопа «Миллиметр» (проект «Спектр-М» Федеральной космической программы), выполняемого АКЦ ФИАН, рассматривались предложения по разработке механизмов поворота 10 метрового телескопа для наведения на исследуемые объекты Вселенной с сохранением неизменным положения центра масс телескопа в процессе поворота относительно космического аппарата. Наиболее перспективными механизмами решения этой задачи явились манипуляционные механизмы параллельной структуры с тремя степенями свободы для совершения плоских, поступательных и вращательных движений. Результаты научных исследований, проведенные Хейло С.В., в области проектирования и синтеза таких механизмов, а также разработанные алгоритмы решения задач кинематики, динамики и управления были использованы при разработке вариантов механизмов поворота космического телескопа «Миллиметр» и могут быть использованы в других космических проектах.

Заведующий отделом
Астрокосмического центра ФИАН,
к.т.н.

Ю.Н.Артеменко